Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Иевлев Павел Николаевич

Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов

Специальность 01.01.05 –
Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф. Смородина Н. В.

Санкт-Петербург — 2021

Оглавление

Введение

Пусть $\xi_{\mathbf{x}}(t)$ – это однородный марковский процесс со значениями в $\mathbb{R}^d$ с условием $\xi_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$, переходная функция $P(t, \mathbf{x}, A)$ которого порождает C_0-полугруппу $T^t \colon C_0(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$, где

$$(T^t f)(\mathbf{x}) = \int_A f(\mathbf{y})\, P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mathbb{E} f(\xi_{\mathbf{x}}(t)).$$

Такие процессы называются феллеровскими. Это весьма широкий класс, при этом обладающий многими хорошими свойствами, выгодно отличающими его от общего случая марковского процесса. Полугруппа однозначно определяется своим генератором

$$L = \lim_{t \to 0+} \frac{T^t - I}{t}.$$

Именно, полугруппа T^t сопоставляет функции φ решение задачи Коши

$$u_t = Lu \tag{0.1}$$

с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$. Таким образом, всякий однородный феллеровский процесс даёт интегральное представление решения задачи Коши (0.1). При этом семейство его одномерных распределений есть фундаментальное решение задачи (0.1).

Класс процессов, который фактически будет рассматриваться, это класс симметричных процессов Леви. В этот класс входит как процесс броуновского движения с генератором

$$L = \frac{1}{2}\Delta,$$

так и класс скачкообразных процессов Леви с мерой Леви Π, имеющей конечный второй момент и инвариантной относительно вращений. В этом случае генератор соответствующей полугруппы имеет вид

$$-Lf(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \Big)\, d\Pi(\mathbf{y}) \tag{0.2}$$

с ядром $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(L)$, $-L \geq 0$, где $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ – это множество бесконечно-дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем.

Сам процесс $\xi(t)$ мы будем называть свободным, имея в виду, что его полугруппа T^t сопоставляет функции φ решение задачи Коши $u_t = Lu$ с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$. Отметим, что введённый термин "свободный процесс" не имеет отношения к широко известному понятию свободной вероятности. "Версиями" $\xi(t)$ мы будем называть процессы, соответствующие другим задачам для оператора L.

В частности, начально-краевая задача Дирихле для оператора $\Delta/2$ приводит к версии винеровского процесса, остановленного в момент первого достижения границы. Задача Неймана для того же оператора приводит к отражающейся версии винеровского процесса.

Существует два подхода к построению версий свободных процессов. Первый подход (Леви, Ито, Скороход) можно условно назвать потраекторным: версии процессов строятся при помощи преобразований траекторий свободного процесса. Главным преимуществом этого подхода является ясный вероятностный смысл. Однако возможности этого подхода ограничены с точки зрения класса генераторов, для которых удаётся строить версии. Именно, генератор должен удовлетворять принципу максимума, или, что практически то же самое, соответствующее фундаментальное решение должно быть вероятностным распределением.

Второй подход (восходящий к работам Винера, Колмогорова, Феллера, Иосиды, Дынкина) основан на более прямом использовании функционально-аналитических методов.

Используемый в настоящей работе метод идейно близок ко второму подходу. При построении версий свободных процессов мы будем использовать идеологию теории обобщённых функций. Именно, мы будем рассматривать функционалы от траекторий, и *определять операции над траекториями через операции над функционалами.* Это позволит нам строить вероятностные представления (в виде математического ожидания функционалов от случайных процессов) для решения задачи Коши и начально-краевых задач в ситуации, когда фундаментальные решения, вообще говоря, не являются вероятностными распределениями. Данный подход является развитием идей работ И. А. Ибрагимова, Н. В. Смородиной и М. М. Фаддеева. В работах [1], [2] и [3] они впервые предложили описанный выше способ и приложили его к задаче о построении вероятностного представления решений одномерной задачи Коши для уравнения Шрёдингера (точнее, для уравнения теплопроводности с комплексным коэффициентом σ, удовлетворяющим условию $0 < \arg\sigma \leq \pi/4$). В работах [3] и [4] они использовали эти же идеи для построения представлений решений начально-краевых задач для оператора Лапласа с условиями типа Дирихле и Неймана. Наконец, в работе [5] авторы обобщили эти построения на класс одномерных симметричных процессов Леви с конечным вторым моментом. В работах [6] и [7] похожие идеи используются для описания невероятностных безгранично-делимых распределений (например, $2 < \alpha$-устойчивые) и строятся вероятностные представления решений задачи Коши для их генераторов. В работе М. Платоновой [8] получены вероятностные представления решений задачи Коши для операторов дифференцирования высокого порядка, а в работе [9] рассмотрены процессы, связанные с оператором Римана–Лиувилля.

В настоящей диссертации эти результаты обобщаются на многомерный случай. В случае задачи Коши обобщение оказывается относительно несложным, тогда как начально-краевые задачи требуют более тонких свойств собственных функций генераторов (которые почти всегда не доступны в явной форме).

В первом параграфе первой главы настоящей диссертации излагается формальный аппарат для возникающих в этой теории невероятностных распределений.

Во втором и третьем параграфах первой главы мы строим версию броуновского движения, соответствующую задаче Коши для уравнения Шрёдингера $-iu_t = \Delta u/2$. При этом семейство фундаментальных решений, очевидно, не является вероятностным.

Во второй главе содержатся необходимые в дальнейшем сведения о свойствах собственных функций операторов Лапласа–Дирихле и Лапласа–Неймана.

Следующие главы работы посвящены построению версий свободных процессов, соответствующих начально-краевым задачам в гладких ограниченных областях. В третьей главе мы строим версию броуновского движения, соответствующую начально-краевым задачам Дирихле и Неймана в d-мерном шаре для уравнения Шрёдингера $-2iu_t = \Delta u$, а также доказываем соответствующие предельные теоремы.

В четвёртой главе работы мы используем операторный подход для построения разложения Скорохода для вещественного броуновского движения в d-мерном шаре D. Именно, мы доказываем, что разность полугрупп отражающегося процесса и свободного процесса является оператором, действующим из границы ∂D в область D. Мы называем этот оператор оператором среднего накопленного импульса. Этот оператор является аналогом среднего локального времени. Во втором параграфе четвёртой главы мы показываем, что средний накопленный импульс действительно является средним значением некоторого оператора, который определён потраекторно. В третьем параграфе мы строим накопленный импульс случайного блуждания и доказываем предельную теорему о сходимости к накопленному импульсу броуновского движения.

В пятой главе результаты про броуновское движение с отражением в шаре получают обобщение по двум направлениям: вместо шара рассматривается произвольная область с гладкой границей, а в качестве процесса ξ берётся симметричный процесс Леви с единичной матрицей ковариации. По формуле Леви–Хинчина характеристическая функция такого процесса равна

$$\varphi_t(\mathbf{p}) = \exp(-tL(\mathbf{p})), \quad L(\mathbf{p}) = -\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - 1 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right) d\Pi(\mathbf{x}), \tag{0.3}$$

причём мера Леви Π инвариантна относительно поворотов и имеет конечный второй момент, $\operatorname{cov}\xi(1) = I$. В пятом параграфе мы рассматриваем случай симметричных α-устойчивых процессов, которые уже не имеют второго момента.

Математическая мотивация для изучения процессов Леви и, в частности, α-устойчивых процессов в ограниченных областях, как отмечают авторы [10], связана с тем, что их предельные ($\alpha = 2$) аналоги – броуновское движение с поглощением/отражением – являются важными моделями в теории вероятностей.

С точки зрения приложений, отражающиеся процессы играют важную роль в теории стохастического управления и финансовой математике в моделях с ограничениями на кредит или потребление (см. [11]). Кроме того, отражающиеся процессы являются удобным инструментом для изучения времени ожидания в очередях с конечной пропускной способностью ([12], [13], [14], [15]), а также дамб и моделей для жидкостей ([16], [17]).

Генератором процесса Леви $\xi(t)$ является нелокальный оператор (теорема 31.5, [18])

$$-Lf(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \Big)\, d\Pi(\mathbf{y}) \tag{0.4}$$

с ядром $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(L)$, $-L \geq 0$. Он порождает сильно-непрерывную полугруппу $(T^t)_{t\geq 0}$ в пространстве $C_0(\mathbb{R}^d)$ непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

Вместо того, чтобы пытаться сузить оператор L (что само по себе затруднительно, так как L – не локальный) на функции, заданные в области D, мы, следуя за авторами [5], построим специальное продолжение функции $f \in W_2^2(D)$ до функции, $\widetilde{f}$, лежащей в $D(L)$. При помощи этого продолжения, мы определим полугруппу P^t, полагая для $f \in W_2^2(D)$

$$P^t f = T^t \widetilde{f}.$$

Продолжение $f \mapsto \widetilde{f}$ будет строиться так, чтобы в него были "зашиты" краевые условия для генератора, и тем самым была выполнена описанная выше программа.

Дальнейшее исследование полугруппы P^t является целью следующих работ. Отметим, что построение процесса по полугруппе является нетривиальной задачей, которая однако может решаться сугубо аналитическими методами. Примером исследования процесса, отвечающего квадратичной форме

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_D \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, d\mathbf{x}, \quad D[\mathcal{E}] = W_2^1(D)$$

в области D с гёльдеровой границей является работа [19]. Нетрудно заметить, что эта форма – не что иное, как квадратичная форма оператора Лапласа с условиями Неймана. Так как оператор Лапласа является генератором стандартного броуновского движения в $\mathbb{R}^d$, авторы рассматривают отражающееся броуновское движение в смысле данного выше определения. В своём исследовании Басс и Хсу ссылаются на общую теорию соответствия форм Дирихле (симметричных замкнутых квадратичных форм с дополнительным свойством марковости) процессам Ханта (квази-левонепрерывные строго марковские процессы), возникшую в шестидесятых годах в работах Ханта, Дынкина, Бёрлинга, Дени, и получившую свой законченный вид в книге Фукушима [20]. В частности, общая теория говорит, что каждой *регулярной* форме Дирихле соответствует процесс Ханта (теорема 6.2.1 из [20]). Если к тому же форма обладает свойством *локальности*, то процесс может быть выбран непрерывным (теорема 4.5.1 из [20]). Наконец, авторы обобщают результат [21] о вероятностном представлении решения задачи Неймана $u_n = f \in B(\partial D)$

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\, \mathbb{E} \int_0^t f(X_x(s))\, dL(s),$$

где $X_x(s)$ – отражающаяся версия броуновского движения в области D, а $L(s)$ – процесс локального времени (см. [22]). Для построения процесса локального времени они так же пользуются техникой форм Дирихле (теорема 5.1.1 из [20]).

Однако теория форм Дирихле применима не только к процессам с непрерывными траекториями, но и к скачкообразным процессам. Общий вид замыкаемой *марковской* формы в пространстве $L_2(D)$ с ядром $C_0^\infty(D)$ даётся так называемой формулой Бёрлинга–Дени (теоремы 2.2.1 и 2.2.2 из [20]):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) = \int_D u_{x_i}(\mathbf{x})\overline{v_{x_j}(\mathbf{x})}\,\nu_{ij}(d\mathbf{x}) +\\ + \int_{D\times D\setminus\delta} \Big(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\Big)\overline{\Big(v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})\Big)}\, J(d\mathbf{x}\times d\mathbf{y}) +\\ + \int_D u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\, k(d\mathbf{x})\end{aligned}$$

для $u, v \in D(\mathcal{E})$. Первое слагаемое интерпретируется как *диффузионный вклад*. Семейство мер ν_{ij} симметрично ($\nu_{ij} = \nu_{ji}$) и положительно определено: для любого компакта $K \subset D$ и вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполнено неравенство

$$\sum_{ij} \xi_i\xi_j\nu_{ij}(K) \geq 0.$$

Вклад второго слагаемого интерпретируется как вклад *скачков*. При этом мера $J(dx \times dy)$ должна быть положительной вне диагонали δ, и для любого компакта $K \subset D$ удовлетворять

$$\int_{K\times K\setminus\delta} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2\, J(d\mathbf{x}\times d\mathbf{y}) < \infty.$$

Наконец, относительно $k(d\mathbf{x})$ предполагается лишь, что это положительная мера, и третье слагаемое интерпретируется как *поглощение процесса в среде.*

Нас интересует только второе слагаемое в этой формуле, однако пространство $C_0^\infty(D)$ не плотно в $W_2^1(D)$, а значит не является ядром формы, отвечающей отражающемуся процессу Леви.

Отметим ещё, что для отражения диффузий в случае достаточно гладкой границы (скажем, C^3-гладкой; см. [23]) есть способ конструктивного построения траекторий отражающегося процесса, восходящий к работе Скорохода [24]. В самом простом случае отражения броуновского движения $w(t)$ от точки 0 на полуоси $[0,\infty)$ используется формула Танаки (см. [25] или [26])

$$|w(t)| \overset{\mathrm{d}}{=} w(t) + \zeta(t).$$

Здесь $\zeta(t)$ – это процесс локального времени. Процесс $|w|$ является очевидным кандидатом на роль отражающейся в $[0,\infty)$ версии процесса, и можно убедиться, что так оно и есть. В терминах траекторий (а не генераторов) это проверяется при помощи леммы Скорохода. В случае $D = [-1,1]$ легко показать, что рассматриваемая нами в третьей части работы конструкция отражающегося броуновского движения совпадает с конструкцией Скорохода, хотя и получается из других соображений.

В пятой части работы мы в некоторой степени воспроизведём это семимартингальное разложение (точного соответствия быть не может, так как процессы Леви, вообще говоря, не обладают локальным временем). Для этого мы построим не одно, а два продолжения $\overline{f}$ и $\widetilde{f}$ до класса $D(L)$ начальной функции $f \in W_2^2(D)$. По $\overline{f}$ мы определим полугруппу R^t, отвечающую процессу в области (аналог $w(t)$ в формуле Танака), а по $\widetilde{f}$ – полугруппу P^t, отвечающую отражающейся версии процесса ($|w(t)|$ в формуле Танака). При этом естественно ожидать, что их разность будет сосредоточена на границе ∂D. Мы покажем, что эту разность полугрупп удобно рассматривать в терминах некоторого оператора

$$Q^t \colon W_2^{1/2}(\partial D) \to W_2^2(D).$$

Как заметили авторы [5], этому оператору естественно придать смысл среднего накопленного границей в результате отражений процесса импульса. Мы покажем, что накопленный импульс можно определить не только в среднем, но и потраекторно (в смысле сходимости в $L_2(dx \times dP)$).

Есть группа общих результатов, касающихся отражения общих процессов Ханта в смысле форм Дирихле в гладкой области D. Они восходят к статьям о *reflected Dirichet spaces* Сильверстейна [27] и Чена [28]. По аналогии с ортогональным (по норме $W_2^1(D)$) разложением в прямую сумму (см. [29], гл. 2, §10, теорема 4)

$$W_2^1(D) = W_2^{1,0}(D) \oplus G_2^1(D), \tag{0.5}$$

где $G_2^1(D)$ – пространство гармонических функции из $W_2^1(D)$, авторы рассматривают форму $\mathcal{E}$ с ядром $C_c^\infty(D) \subset D(\mathcal{E})$, определяют аналог понятия гармоничности, отвечающий такой форме, и расширяют форму до

$$D(\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}) = D(\mathcal{E}) \oplus \widetilde{G}_2^1(D).$$

Процесс Ханта, отвечающий $\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}$ можно назвать отражённым в смысле Сильверстейна-Чена.

В некоторых случаях удаётся продвинуться дальше. Авторы работы [10] построили процессы, отвечающие форме Дирихле дробного оператора Лапласа в области D

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{c}\int_D\int_D \frac{\big(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})\big)\overline{\big(v(\mathbf{x})-v(\mathbf{y})\big)}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}$$

на области определения $\mathcal{F}$, состоящей из функций $u \in L_2(D)$ таких, что конечен интеграл

$$\int_D\int_D \frac{\big(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})\big)^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} < \infty.$$

Они показали, что построенные ими процессы являются в точности отражением с смысле Сильверстейна–Чена, а последнее неравенство определяет область определения формы $\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}$.

Иной подход был предложен в работе [30]. Именно, авторы рассматривают с квадратичной формой дробного оператора Лапласа в $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})\big)\overline{\big(v(\mathbf{x})-v(\mathbf{y})\big)}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y},$$

а в качестве “граничного условия” ставят *нелокальное условие Неймана*

$$\mathcal{N}_s u(\mathbf{x}) = \int_D \frac{u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}}\,d\mathbf{y} = 0 \text{ для } \mathbf{x} \notin D.$$

Такая постановка обладает многими преимуществами. Среди них ясная вероятностная интерпретация. Процесс с таким генератором, выскакивая за пределы области D, немедленно возвращается *в случайную точку области* с плотностью пропорциональной $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\alpha}$.

Следует также упомянуть работу [31], в которой рассматривается дробный лапласиан в смысле спектральной теоремы (разложение по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Неймана в области).

Наконец, в работах [32] и [33] рассматривается *детерминистический* возврат процесса в область, и доказывается связь с задачей типа Неймана для нелокальных операторов.

Наша работа, наследующая работе [5], отличается от описанных выше результатов тем, что мы работаем с генератором процесса Леви *с классическим* *условием Неймана*. Иначе говоря, мы рассматриваем аналог A^N генератора L в области D, с областью определения $D(A^N) = \mathcal{N}(D)$, где

$$\mathcal{N}(D) = \left\{ u \in W_2^2(D) \colon \gamma_1 u = 0 \right\},$$

а оператор $\gamma_1 \colon W_2^2(D) \to W_2^{1/2}(D)$ – это замкнутый с $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ оператор взятия нормальной производной на ∂D.

В качестве мотивации для рассмотрения задачи в такой постановке можно указать на тот факт, что любое решение $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ уравнения

$$-\Delta u = \varkappa^2 u$$

удовлетворяет уравнению

$$-Lu = L(\varkappa)u,$$

где оператор L определён формулой (0.4), а через $L(p)$ для $p \geq 0$ обозначена функция (0.3), которая для симметричного процесса Леви оказывается зависящей только от модуля $p = |\mathbf{p}|$. При этом справедливо неравенство

$$|L(p)| \leq Cp^2$$

для всех $p \geq 0$.

Подчеркнём, что во всех частях работы мы интересовались скорее методом, нежели общностью результатов. Поэтому в пятой части мы ограничиваемся случаем гладкой границы и чисто скачкообразного симметричного процесса Леви с конечным вторым моментом. Добавить диффузионный член к чисто скачкообразному процессу Леви не составляет труда. Процессы Леви, не имеющие второго момента (например, α-устойчивые процессы) также могут быть рассмотрены этим методом, однако непосредственно изложенная в данной работе схема на них не распространяется. В конце пятой части мы сделаем серию замечаний о том, что следует делать в этом случае. Симметричность процесса Леви на данный момент является существенным ограничением на применимость метода. В приложениях 1 и 2 приводятся необходимые обозначения и стандартные факты о начально-краевых задачах в ограниченных многомерных областях.

Глава 1

Комплексное броуновское движение

В этой части работы мы построим специальную комплексификацию стандартного броуновского движения $w(t)$ в $\mathbb{R}^d$, соответствующую задаче Коши для уравнения Шрёдингера

$$-u_t = \Delta u/2, \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$. Как отмечалось во введении, отвечающие такому "процессу" распределения не могут быть вероятностными. Пусть $d = 1$. Если записать усреднение по траекториям в виде

$$u(t, x) = \mathbb{E}\varphi(x + \sigma w(t)) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}e^{-i\sigma w(t)}\widehat{\varphi}(p)\,dp,$$

становится ясно, что при $\sigma = e^{i\pi/4}$ и произвольной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ двойной интеграл $\mathbb{E}\int_{-\infty}^{\infty}$, вообще говоря, разойдётся. В работе [3] был предложен способ регуляризации расходящегося интеграла при помощи двух инструментов: проекторов Рисса и того, что авторы назвали вторым центрированием – техники удаления третьего семиинварианта у распределения. При помощи проекторов Рисса мы разложим функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ в сумму двух функций

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-,$$

где φ_+ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а φ_- в нижнюю. Операция второго центрирования будет объяснена ниже. И та, и другая операция, если рассмотреть их как операции над процессом $w(t)$, выводят за пределы класса вероятностных мер.

Результаты этой главы опубликованы в работе [34].

1.1 Случайные функционалы и операции над ними

Чтобы справиться с тем, что распределения, отвечающие уравнению Шрёдингера, не являются вероятностными, мы введём в рассмотрение довольно необычный класс случайных функционалов. Для нас он будет служить тем самым расширением понятия *случайного вектора*, в которое уложится интересующий нас класс распределений. Мы будем действовать по аналогии со стандартным определением [35], гл. 2, §1.

Обозначим через $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ пространство d-мерных случайных векторов на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, снабжённое топологией сходимости по распределению. В качестве класса пробных функций мы возьмём пространство $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ функций

$$\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

являющихся обратными преобразованиями Фурье зарядов конечной полной вариации с финитным носителем

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{px}} \widehat{\Phi}(d\mathbf{p}). \tag{1.2}$$

В случае, когда преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ функции φ является суммируемой на $\mathbb{R}^d$ функцией, заряд $\widehat{\Phi}$ будет абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d$, причём

$$\widehat{\Phi}(A) = \int_A \widehat{\varphi}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}\,.$$

Ниже преобразованием Фурье функции класса $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ будем называть как функцию $\widehat{\varphi}(\mathbf{p})$, так и заряд $\widehat{\Phi}(A)$.

Элементы пространства $\mathcal{Z}_0$ являются целыми аналитическими функциями d переменных, ограниченными на $\mathbb{R}^d$.

Топологию на $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ зададим следующим образом: будем говорить, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{Z}_0} 0$, если $\widehat{\Phi}_n \xrightarrow{*w} 0$. Иначе говоря, для всех непрерывных ограниченных функций g

$$\int g\, d\widehat{\Phi}_n \to 0.$$

Случайными функционалами мы будем называть линейные отображения $\xi\colon \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{RV}(\mathbb{R})$. Действие ξ на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ обозначаем через $\xi[\varphi]$. Обобщённой случайной функцией будем называть непрерывный случайный функционал. Множество обобщённых функций будем обозначать $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$.

Нам потребуется особое вложение пространства $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$. Именно, для каждой $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ определим обобщённую случайную функцию $\widetilde{\xi} \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, действующую на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ по правилу

$$\widetilde{\xi}[\varphi] = \varphi(-\xi). \tag{1.3}$$

Для простоты обозначений мы будем опускать волну над ξ.

Далее нам потребуется определить ряд операций над обобщёнными случайными функциями. В силу специфики нашей задачи, они не всегда будут совпадать с определениями из [35].

Под $\alpha\xi$ для вещественных α и $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ будем понимать обобщённую случайную функцию, действующую по правилу

$$(\alpha\xi)[\varphi] = \xi[\varphi_\alpha], \tag{1.4}$$

где $\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \varphi(\alpha\mathbf{x})$.

Обобщённым математическим ожиданием $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ будем называть линейный функционал $\mathbb{E}\xi\colon \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, действующий по правилу

$$(\mathbb{E}\xi)[\varphi] = \mathbb{E}\xi[\varphi]. \tag{1.5}$$

В [35] этот объект называется средним значением обобщённой случайной функции.

Характеристической функцией обобщённой случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ будем называть функцию $f_\xi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$f_\xi(\mathbf{p}) = \mathbb{E}\xi\left[e^{-i\mathbf{px}}\right],$$

где под скобками в экспоненте понимается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, а функционал действует по переменной $\mathbf{x}$.

С определённым выше вложением $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$ характеристическая функция обычной случайной величины совпадает с обычным определением.

Далее будем говорить, что ξ и η из $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ независимы, если при всех пробных функциях $\varphi, \psi \in \mathbb{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ обычные случайные величины $\xi[\varphi]$ и $\eta[\psi]$ независимы. Аналогично определим независимость набора $\{\xi_k\} \subset \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$.

Проекцией случайного функционала ξ на k-ую координатную ось будем называть случайный функционал $\xi_k \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^1)$, действующий на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$\xi_k[\varphi] = \xi[\varphi_k], \tag{1.6}$$

где под $\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi(x_k)$ мы понимаем функцию $\varphi_k \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$, зависящую только от переменной x_k.

Определим теперь обратную операцию. Паре обобщённых случайных функций $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^n)$, $\eta \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^m)$ сопоставим обобщённую случайную функцию $(\xi, \eta) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^{n+m})$, которая действует на $\varphi \in \mathbb{Z}_0(\mathbb{R}^{n+m})$ по правилу

$$(\xi, \eta)[\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \xi\left[\eta\left[\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right]\right]. \tag{1.7}$$

Аналогичным образом определим обобщённую случайную функцию

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d),$$

действующую на $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$.

Таким образом, обобщённая случайная величина $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ может быть записана в виде $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, где под ξ_k понимается k-ая проекция.

Лемма 1.1. *Пусть обобщённые случайные функции* $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ *независимы. Тогда*

$$f_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)}(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \prod_{k=1}^{d} f_{\xi_k}(p_k).$$

Доказательство. Докажем утверждение в случае $n = 2$.

$$f_{(\xi, \eta)}(p_1, p_2) = \mathbf{E}\,(\xi, \eta)[e^{-ipx}e^{-ipy}] = \mathbf{E}\,\xi[\eta[e^{-ipy}e^{-ipx}]] = \\ = \mathbf{E}\,\xi[e^{-ipx}]\eta[e^{-ipy}] = \mathbf{E}\,\xi[e^{-ipx}]\,\mathbf{E}\,\eta[e^{-ipy}] = f_\xi(p_1)f_\eta(p_2).$$

□

Введём стандартные обозначения для оператора инверсии I

$$\mathrm{I}\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

и оператора сдвига $\mathrm{T}_{\mathbf{x}}$ на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{x}).$$

С каждой обобщённой случайной функцией ξ свяжем оператор Q_ξ, действующий по правилу

$$Q_\xi\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\xi[\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\varphi]. \tag{1.9}$$

Лемма 1.2. *Оператор* Q_ξ *действует на функции из* $L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ *как псевдодифференциальный с символом* $f_\xi(\mathbf{p})$.

Доказательство. Имеем

$$Q_\xi\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\xi[\mathrm{T}_{\mathbf{x}}\varphi] = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-i\mathbf{px}}\mathbf{E}\,\xi[e^{-i\mathbf{py}}]\widehat{\varphi}(\mathbf{p})\,d\mathbf{p} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-i\mathbf{px}}f_\xi(\mathbf{p})\widehat{\varphi}(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}\,.$$

□

Пусть характеристическая функция $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ имеет непрерывные производные по всем переменным вплоть до порядка $|\beta|$. Обобщёнными семиинвариантами ξ будем называть коэффициенты s^α, $|\alpha| \leqslant |\beta|$ в формуле

$$\ln f_\xi(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \sum_{|\alpha|=1}^{|\beta|} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathbf{p}^\alpha + O(|\mathbf{p}|^{|\beta|+1}).$$

Если семиинварианты $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ корректно определены и функция

$$\widehat{B}(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \exp\left(-\sum_{|\alpha|=1,\,3} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathbf{p}^\alpha\right)$$

лежит в классе $L_1(\mathbb{R}^d)$, то её обратное преобразование Фурье B определено в классическом смысле. В этом случае вторым центрированием ξ будем называть случайный функционал $\xi^{(2)}$, определяемый равенством

$$\xi^{(2)}[\varphi] = \xi[\varphi * B].$$

Нетрудно показать, что семиинварианты первого и третьего порядка случайного функционала $\xi^{(2)}$ равны нулю.

Классом $\mathcal{Z}_{0+}$ будем называть множество функций $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ таких, что $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset (-\infty,\, 0]$. Аналогично определяется $\mathcal{Z}_{0-}$. Функции класса $\mathcal{Z}_{0+}$ ограничены в верхней полуплоскости, а $\mathcal{Z}_{0-}$ – в нижней.

Далее, проекторы Рисса $P_\pm$ – это операторы, действующие на $\psi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$P_+\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\Psi}(dp), \quad P_-\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\Psi}(dp),$$

Проекторы Рисса "разбивают" функцию $\psi \in \mathcal{Z}_0$ на $\psi_+ \in \mathcal{Z}_{0+}$ и $\psi_- \in \mathcal{Z}_{0-}$.

Для $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^1)$ определим обобщённую случайную функцию $\xi^\bigstar$, действующую на $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$\xi^\bigstar[\varphi] = \xi[(\mathrm{I}P_+ + P_-)\varphi],$$

где I – это оператор инверсии (1.8). Для обычных случайных величин $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ последнее равенство может быть переписано как

$$\xi^\bigstar[\varphi] = \varphi_+(\xi) + \varphi_-(-\xi).$$

Следующим шагом обобщим операцию $\bigstar$ на класс $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$. Обобщённой случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ поставим в соответствие $\xi^\bigstar$ из того же класса, действующую по правилу

$$\xi^\bigstar = (\xi_1^\bigstar,\, \ldots,\, \xi_d^\bigstar),$$

где ξ_k – проекция ξ на k-ую ось, определённая формулой (1.7).

Введём удобное обозначение. Если $x = (x_1,\, \ldots,\, x_d) \in \mathbb{R}^d$, то через

$$\mathbf{x}_\bigstar = (|x_1|,\, \ldots,\, |x_d|) \tag{1.10}$$

будем обозначать набор чисел, составленный из модулей координат вектора $\mathbf{x}$.

Лемма 1.3. *Обобщённые характеристические функции* ξ, $\xi^\bigstar \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ *связаны соотношением*

$$f_{\xi^\bigstar}(\mathbf{p}) = f_\xi(\mathbf{p}_\bigstar).$$

Утверждение леммы проверяется прямым вычислением.

Ясно, что если $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$, то $f_{\xi^\star}(\mathbf{p})$ в окрестности $\mathbf{p} = 0$ не имеет непрерывных производных и, соответственно, для неё формально не определены ни семиинварианты, ни второе центрирование. Тем не менее, в некоторых частных случаях такое определение можно дать.

Именно, дополнительно предположим, что семминварианты s^α обобщённой случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ корректно определены и функция

$$\widehat{B}(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_d) = \exp\left(-\sum_{|\alpha|=1,\,3} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathbf{p}^\alpha\right)$$

лежит в классе $L_1(\mathbb{R}^d)$, соответственно, её обратное преобразование Фурье B определено в классическом смысле. В этом случае вторым центрированием $\xi^\star$ будем называть обобщённую случайную функцию $\xi^{\star,\,(2)}$, определяемую равенством

$$\xi^{\star,\,(2)}[\varphi] = \xi^\star\big[\varphi * B\big].$$

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.4. *Пусть вектор $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ имеет диагональную матрицу ковариации. Тогда*

$$\xi^{(2)} = \left(\xi_1^{(2)},\, \xi_2^{(2)},\, \ldots,\, \xi_d^{(2)}\right).$$

В данном случае под матрицей ковариации $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ мы понимаем матрицу, составленную из обобщённых семиинвариантов ξ второго порядка. В частности, утверждение справедливо для векторов с независимыми компонентами.

1.2 Аппроксимация решения задачи Коши для уравнения $-2iu_t = \Delta u$ средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля

Пусть $\nu(dt,\, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $(0,\, \infty)^2$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,\, dx) = \frac{dt\, dx}{x^3}.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс, полагая

$$\xi_1^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x\nu(ds,\, dx).$$

Здесь e – это основание натурального логарифма.

Известно, что (см. [36], стр. 42) характеристическая функция случайной величины $\xi_1^\varepsilon(t)$ равна

$$f_{\xi_1^\varepsilon(t)}(p) = \exp\left(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\left(e^{ipx}-1\right)\,\frac{dx}{x^3}\right).$$

Пусть $\xi_k^\varepsilon(t)$, $k=2,\,\ldots,\,d$ – независимые копии $\xi_1^\varepsilon(t)$. Как и выше, положим $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$. При фиксированных $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ определим обобщенную случайную функцию $\eta^\varepsilon(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^\varepsilon(t) = \big(\sigma\xi_1^\varepsilon(t),\,\sigma\xi_2^\varepsilon(t),\,\ldots,\,\sigma\xi_d^\varepsilon(t)\big)^{\bigstar,\,(2)}$$

Аналогично тому, как это было сделано в [3], можно показать, что в данном случае операция второго центрирования корректно определена.

В силу независимости набора $\{\xi_k^\varepsilon(t)\}$, последнее равенство можно переписать как

$$\eta^\varepsilon(t) = \big((\sigma\xi_1^\varepsilon(t))^{\bigstar,\,(2)},\,(\sigma\xi_2^\varepsilon(t))^{\bigstar,\,(2)},\,\ldots,\,(\sigma\xi_d^\varepsilon(t))^{\bigstar,\,(2)}\big).$$

Заметим, что ни операция второго центрирования, ни операция $\bigstar$, не влияют на независимость (они сводятся к замене пробной функции). Поэтому характеристическая функция $\eta^\varepsilon(t)$ распадается в произведение

$$f_{\eta^\varepsilon(t)}(p_1,\,\ldots,\,p_d) = \prod_{k=1}^d f_{\left(\sigma\xi_k^\varepsilon(t)\right)^{\bigstar,\,(2)}}(p_k).$$

Характеристические функции сомножителей легко пересчитываются через характеристическую функцию $\xi_1^\varepsilon(t)$

$$\begin{aligned}f_{\left(\sigma\xi_k^\varepsilon(t)\right)^{\bigstar,\,(2)}}(p_k) &= f_{\left(\sigma\xi_1^\varepsilon(t)\right)^{(2)}}(|p_k|) = \\ &= \exp\Bigg(-\frac{itp_k^2}{2} + t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p_k|\sigma x} - 1 - i|p_k|\sigma x - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\Big(i|p_k|\sigma x\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(i|p_k|\sigma x\Big)^3\Big)\,\frac{dx}{x^3}\Bigg).\end{aligned}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, полагая

$$P_\varepsilon^t = Q_{\eta^\varepsilon(t)},$$

где $Q_{\eta^\varepsilon(t)}$ – оператор, задаваемый формулой (1.9), соответствующий $\xi = \eta^\varepsilon(t)$. При каждом t этот оператор действует как псевдодифференциальный с символом $f_{\eta^\varepsilon(t)}$, и, следовательно, распадается в произведение коммутирующих операторов, каждый из которых обладает полугрупповым свойством по t.

Далее, обозначим через P^t полугруппу

$$P^t = e^{\frac{it}{2}\Delta},$$

где Δ – оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$ как оператор Лапласа. Полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\cdot)$ уравнения Шрёдингера (1.1)(см., например, [37], X.8.).

Нам понадобится одно техническое утверждение, которое легко проверить непосредственным вычислением.

Лемма 1.5. *Пусть*

$$g(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}.$$

Тогда при всех $z \in \mathbb{C}$*, удовлетворяющих условию* $\arg z \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ *справедливо неравенство* $|g(z)| \leqslant \min\{|z|^3, |z|^4\}$.

Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 1.1. *Существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для любой* $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R}^d)$ *и всех* $t > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|P_\varepsilon^t \varphi - P^t \varphi\|_{L_2} \leqslant C t \varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^4}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1 параграфа 4 статьи [3] основано на использовании формулы Дюамеля ([38], гл. IX, § 2 п.1)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)(A+B)} B e^{\tau A}\, d\tau. \tag{1.11}$$

Введём обозначения для операторов

$$A = \frac{i}{2}\Delta, \qquad B = G_\varepsilon - A,$$

где G_ε – это генератор полугруппы P_ε^t.

Отметим, что при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^4 \to W_2^4} \leqslant 1,$$

а из леммы 1.5 следует справедливость неравенства

$$\|e^{t(A+B)}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant 1.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^4 \to L_2}$.

Так как генератор произведения коммутирующих полугрупп есть сумма генераторов, оператор B является псевдодифференциальным, а его символ $\widehat{\beta}$ распадается в сумму

$$\widehat{\beta}(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_d) = \sum_{k=1}^{d} \widehat{b}(p_k), \tag{1.12}$$

где

$$\widehat{b}(p) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}\Big(i|p|\sigma x\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(i|p|\sigma x\Big)^3 \right) \frac{dx}{x^3}. \tag{1.13}$$

Заметим, что для некоторой константы $C > 0$ справедливо неравенство $|\widehat{\beta}(\mathbf{p})|^2 \leqslant C|\mathbf{p}|^4\varepsilon^2$. Из этого неравенства следует, что для некоторой константы $\widetilde{C} > 0$ справедливо

$$\begin{aligned} \|B\varphi\|^2_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int |\widehat{\beta}(\mathbf{p})|^2 |\widehat{\varphi}(\mathbf{p})|^2 \, d\mathbf{p} \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int \sum_{k=1}^{d} \left|\widehat{b}(p_k)\right|^2 |\widehat{\varphi}(\mathbf{p})|^2 \, d\mathbf{p} \leqslant \\ \leqslant \tilde{C}\varepsilon^2 \int d\mathbf{p} \sum_{k=1}^{d} |p_k|^4 \, |\widehat{\varphi}(\mathbf{p})|^2 \, d\mathbf{p} = \tilde{C}\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^4}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Из последней оценки следует утверждение теоремы. □

1.3 Аппроксимация решения задачи Коши для уравнения $-iu_t = \Delta u/2$ средними значениями функционалов от случайных блужданий

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных d-мерных векторов с общим распределением $\mathcal{P}$, сосредоточенном на $\mathbb{R}^d_+$. Будем предполагать, что случайный вектор ξ_1 имеет единичную матрицу ковариаций и конечные моменты третьего порядка. Пусть $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Определим последовательность $\{\zeta^n\}_{n=1}^{\infty}$ сложных пуассоновских процессов, полагая

$$\zeta^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

При каждом $t > 0$ характеристическая функция случайного вектора $\zeta^n(t)$ равна

$$f_{\zeta^n}(p_1, \ldots, p_d) = \exp\left(nt \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \left(\exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{y}}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) \mathcal{P}(d\mathbf{y}) \right).$$

Как и ранее, положим $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$ и определим при каждом фиксированном t обобщённую случайную функцию $\eta^n(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^n(t) = \bigl(\sigma\zeta^n_1(t), \sigma\zeta^n_2(t), \ldots, \sigma\zeta^n_d(t)\bigr)^{\bigstar,(2)}.$$

Нетрудно показать, что операция второго центрирования в данном случае определена корректно.

Далее, так как матрица ковариации обобщённой случайной функции $\eta^n(t)$ диагональна, то, в силу леммы 1.4, справедливо

$$\eta^n(t) = \bigl((\sigma\zeta^n_1(t))^{\bigstar,(2)}, (\sigma\zeta^n_2(t))^{\bigstar,(2)}, \ldots, (\sigma\zeta^n_d(t))^{\bigstar,(2)}\bigr).$$

Обобщённая характеристическая функция $\eta^n(t)$ имеет вид

$$f_{\eta^n(t)}(p_1, \ldots, p_d) = -\frac{i|\mathbf{p}|^2}{2} + n \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \left(\exp\left(\frac{i\sigma\mathbf{p}^{\bigstar}\mathbf{y}}{\sqrt{n}} \right) - 1 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{i\sigma\mathbf{p}^{\bigstar}\mathbf{y}}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{i\sigma\mathbf{p}^{\bigstar}\mathbf{y}}{\sqrt{n}} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{i\sigma\mathbf{p}^{\bigstar}\mathbf{y}}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) \mathcal{P}(d\mathbf{y}). \quad (1.15)$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов P^t_n, полагая

$$P^t_n = Q_{\eta^n(t)},$$

где $Q_{\eta^n(t)}$ – оператор, задаваемый формулой (1.9), соответствующий $\xi = \eta^n(t)$. При каждом t этот оператор действует как псевдодифференциальный с символом $f_{\eta^n(t)}$.

Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 1.2. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in W^3_2(\mathbb{R}^d)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t_n\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant \frac{Ct}{\sqrt{n}} \|\varphi\|_{W^3_2}, \quad (1.16)$$

где, как и выше,

$$P^t = e^{\frac{it}{2}\Delta}. \quad (1.17)$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения также основано на использовании формулы Дюамеля (1.11). Обозначим

$$A = \frac{i}{2}\Delta, \qquad B = G_n - A, \tag{1.18}$$

где G_n – это генератор полугруппы P_n^t.

Как и выше, достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^3 \to L_2}$.

Заметим, что величина $\mathbf{p}^\bigstar \mathbf{y}$ в подынтегральном выражении формулы (1.15) всегда неотрицательна. Из леммы 1.5 следует неравенство

$$\left| g\left(\frac{i\sigma \mathbf{p}^\bigstar \mathbf{y}}{\sqrt{2n}}\right)\right| \leqslant \left(\frac{\mathbf{p}^\bigstar \mathbf{y}}{\sqrt{2n}}\right)^3 \leqslant \left(\frac{\|\,\mathbf{p}^\bigstar\,\| \cdot \|\mathbf{y}\|}{\sqrt{2n}}\right)^3.$$

Таким образом

$$|\widehat{b}_n(p_1,\, \ldots,\, p_d)| \leqslant \frac{\|\,\mathbf{p}^\bigstar\,\|^3}{2^{3/2}\sqrt{n}} \int \|\mathbf{y}\|^3\, \mathcal{P}(d\mathbf{y})\,.$$

Последний интеграл конечен в силу условия на моменты третьего порядка.

Далее, имеем

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int |\widehat{\varphi}(\mathbf{p})|^2 |\widehat{b}_n(\mathbf{p})|^2 \, d\mathbf{p} \leq$$

$$\leq \frac{C}{n} \int |\widehat{\varphi}(\mathbf{p})|^2 \|\,\mathbf{p}^\bigstar\,\|^6 \, d\mathbf{p} \leqslant \frac{\tilde{C}}{n} \|\varphi\|_{W_2^3}^2.$$

Из последней оценки следует утверждение теоремы. □

Глава 2

Конструкция комплексного броуновского движения в d-мерном шаре с отражением или поглощением на границе шара

В этой части работы мы рассматриваем процессы, отвечающие начально-краевым задачам Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в d-мерном шаре. Так как оператор Лапласа во всём пространстве является генератором свободного броуновского движения, такие процессы мы будем называть броуновским движением с поглощением и с отражением соответственно.

Результаты настоящей статьи опубликованы в работе [39].

2.1 Конструкция комплексного броуновского движения с поглощением на границе

Пусть $\sigma = e^{i\phi}$, где $\phi \in [0, \pi/4]$, и пусть начальная функция f задачи Дирихле

$$\begin{cases} u_t = \sigma^2 \Delta u/2, \ \mathbf{x} \in D, \\ u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ u\big|_{\partial D} = \gamma_0 f, \end{cases} \tag{2.1}$$

принадлежит классу $W_2^2(D)$. Пусть f_h – это гармоническая функция в области D, удовлетворяющая условию $\gamma_0 f_h = \gamma_0 f$.

Обозначим через $c_{\lambda\mu}^h$ коэффициенты разложения $\gamma_0 f$ по базису $\{Y_\lambda^\mu\}$. Тогда

$$f_h(\mathbf{x}) = \sum c_{\lambda\mu}^h x^\lambda Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.2}$$

При этом f_h принадлежит классу $W_2^2(D)$ и справедливо

$$\sum \lambda^3 |c_{\lambda\mu}^h|^2 < \infty. \tag{2.3}$$

Для каждого $M > 0$ определим гармонический полином f_h^M, полагая

$$f_h^M(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \le M^{1/d}} c_{\lambda\mu}^h x^\lambda Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.4}$$

Определим функциюf_0, полагая $f_0 = f - f_h$. Ясно, что $f_0 \in W_2^{2,0}(D)$. Разложим f_0 по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Дирихле (лемма 4.5)

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c_k^0 s_k(\mathbf{x}) = \sum c_{\lambda\mu k}^0 j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.5}$$

Для $M > 0$ определим функцию f_0^M, полагая

$$f_0^M(\mathbf{x}) = \sum_{m \le M} c_m^0 s_m(\mathbf{x}). \tag{2.6}$$

Из леммы 4.11 (Приложение 1) следует, что f_0^M аналитическая функция d переменных. Наконец, положим $f^M = f_0^M + f_h^M$.

Теперь определим полугруппу P^t, полагая для $f \in W_2^2(D)$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = (L_2) \lim_{M \to \infty} \mathbf{E}\, f^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)). \tag{2.7}$$

Ввиду гармоничности h, имеет место

$$\mathbf{E}\, f_h^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = f_h^M(\mathbf{x}). \tag{2.8}$$

Пользуясь леммой 4.11, получим

$$\mathbf{E}\, f_0^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = \sum_{m \le M} c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa_m^2 t}{2}\right) s_m(\mathbf{x}). \tag{2.9}$$

Таким образом

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \sum c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa_m^2 t}{2}\right) s_m(\mathbf{x}) + f_h(\mathbf{x}). \tag{2.10}$$

Покажем, что при $M \to \infty$ имеет место сходимость $P^t f^M \to P^t f$:

Теорема 2.1. *Пусть $f \in W_2^2(D)$, $u(t, \mathbf{x}) = (P^t f)(\mathbf{x})$ и $u_M(t,\ \mathbf{x}) = (P^t f^M)(\mathbf{x})$. Тогда существует число $C > 0$ такое, что*

$$\sup_{t \ge 0} \|u(t, \cdot) - u_M(t, \cdot)\|_{L_2(D)} \le \frac{C}{M^{2/d}} \|f\|_{W_2^2(D)}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|u(t, \cdot) - u_M(t, \cdot)\|_{L_2(D)}^2 \le 2\|f_0 - f_0^M\|_{L_2(D)}^2 + 2\|f_h - f_h^M\|_{L_2(D)}^2. \tag{2.12}$$

В силу выбранной нормировки, первое слагаемое оценивается через хвост ряда $|c_k^0|^2$, тогда как члены разложения f_h не нормированы в $L_2(D)$:

$$\|x^\lambda Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})\|_{L_2(D)}^2 = \int_0^1 x^{2\lambda} x^{d-1}\, dx \int\limits_{S^{d-1}} |Y_\lambda^\mu(\mathbf{x})|^2\, d\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\lambda + 2d}. \tag{2.13}$$

При $\lambda \geq M^{1/d}$ справедливо

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda + d} \leq \frac{\lambda^3}{M^{4/d}} \tag{2.14}$$

Следовательно,

$$\|u(t,\,\cdot) - u_M(t,\,\cdot)\|^2_{L_2(D)} \leq \frac{C}{M^{4/d}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|c^0_m|^2 m^{4/d} + \sum |c^h_{\lambda\mu k}|^2\lambda^3\right) \leq$$
$$\leq \frac{C}{M^{4/d}}\left(\|f_0\|^2_{W^2_2(D)} + \|\gamma_0 f\|^2_{W^{3/2}_2(\partial D)}\right) \leq \frac{C}{M^{4/d}}\|f\|^2_{W^2_2(D)}. \tag{2.15}$$

В последнем неравенстве использована теорема о следе (см. [40]). □

Получим теперь явные формулы для ядра оператора P^t. Подставим в (2.10) выражение для коэффициентов Фурье $c^0_m = (f_0,\ s_m)_{L_2(D)}$ и изменим порядок интегрирования. Получим

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int f_0(\mathbf{y}) R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\; d\mathbf{y} + f_h(\mathbf{x}), \tag{2.16}$$

где

$$R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum s_m(\mathbf{x})\overline{s_m(\mathbf{y})}\exp\left(-\frac{\sigma^2\varkappa^2_m t}{2}\right). \tag{2.17}$$

В случае $\sigma^2 = i$ ряд (2.17) расходится и мы рассматриваем его как формальное выражение для ядра унитарного оператора. Подставим в (2.16) $f_0 = f - f_h$ и $f_h = Hf$. Тогда

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y}) R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\; d\mathbf{y} + \int_{\partial D} (\gamma_0 f)(\hat{\mathbf{y}})\, Q_t(\mathbf{x},\ \hat{\mathbf{y}})\; d\hat{\mathbf{y}}, \tag{2.18}$$

где

$$Q_t(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}}) = h_0(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}}) - \int\limits_D R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\, h_0(\mathbf{u},\ \hat{\mathbf{y}})\; d\mathbf{u}. \tag{2.19}$$

Вычислим второе слагаемое ядра Q_t. Первым шагом подставим в разложение R_t (2.10) явный вид нормированных (формула (4.28)) собственных функций:

$$R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{u}) = \sum \frac{j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k}x) Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})}{n_{\lambda\mu k}} \frac{j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k}u)\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{u}})}}{n_{\lambda\mu k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2\varkappa^2_{\lambda k} t}{2}\right). \tag{2.20}$$

Затем воспользуемся известным разложением для ядра Пуассона

$$h_0(\mathbf{u},\,\hat{\mathbf{y}}) = \sum u^\lambda Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{u}})\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})}. \tag{2.21}$$

Наконец применим соотношение ортогональности для сферических гармоник (4.12) и лемму (4.9)

$$\int\limits_D R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\, h_0(\mathbf{u},\ \hat{\mathbf{y}})\ d\mathbf{u} =$$

$$= \sum \frac{1}{n^2_{\lambda\mu k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t}{2}\right) j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})} \int\limits_0^1 y^{d-1}\, j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} y)\, y^\lambda\ dy =$$

$$= \sum 2\Big(j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})\Big)^{-2} \frac{j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})}{\varkappa_{\lambda k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t}{2}\right) j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})} \quad (2.22)$$

Окончательно,

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y}) R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\ d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} (\gamma_0 f)(\hat{\mathbf{y}}) Q_t(\mathbf{x},\, \hat{\mathbf{y}})\, d\hat{\mathbf{y}}, \qquad (2.23)$$

где

$$Q_t(\mathbf{x},\, \hat{\mathbf{y}}) = h_0(\mathbf{x},\, \hat{\mathbf{y}}) - 2 \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t/2\right)}{\varkappa_{\lambda k}\, j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})} j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})} \qquad (2.24)$$

и

$$R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) = 2 \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t/2\right)}{\left(j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})\right)^2} j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} u) Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{u}})}. \qquad (2.25)$$

Как отмечалось в [4], в случае вещественного σ формула (2.23) имеет простой вероятностный смысл. Именно, для фиксированных $(t,\, \mathbf{x})$ формула (2.23) задаёт распределение винеровского процесса в момент времени t, выпущенного из точки $x \in D$ и прилипающего к границе ∂D в момент первого достижения. Функция $R_t(\mathbf{x},\, \cdot)$ есть плотность меры в области D, отвечающая тем траекториям $x + \sigma w(t)$, которые к моменту t ещё не вышли на границу, а $Q_t(\mathbf{x},\, \cdot)$ есть плотность меры на границе области, отвечающая распределению значания процесса в момент первого достижения границы.

При $\mathrm{Re}\ \sigma^2 > 0$ полученные формулы для фундаментального решения того же типа, что и для вещественного σ, однако $R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ и $Q_t(\mathbf{x},\, \hat{\mathbf{y}})\, d\hat{\mathbf{y}}$ теперь не вероятностные меры, а комплекснозначные заряды внутри круга D и на его границе ∂D соответственно. При этом сохраняется свойство

$$\int\limits_D R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\ d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} Q_t(\mathbf{x},\, \hat{\mathbf{y}})\ d\hat{\mathbf{y}} = 1, \qquad (2.26)$$

вытекающее из следующего наблюдения: $P^t 1 = 1$.

В случае же Re $\sigma^2 = 0$, экспоненциальные сомножители по модулю равны единице, что влечёт расходимость рядов для R_t и Q_t. Соответственно, при фиксированных $(t,\, \mathbf{x})$ выражение $R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ является теперь не мерой, а лишь функционалом, заданным на множестве конечных линейных комбинаций функций s_m. В частности, это означает, что при фиксированных $(t,\, \mathbf{x})$ невозможно придать смысл выражению

$$\int\limits_D f(\mathbf{y})\, R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\; d\mathbf{y} \tag{2.27}$$

для произвольного $f \in L_2(D)$. Однако мы можем, фиксировав $t > 0$, определить (2.27) при почти всех по мере Лебега $\mathbf{x} \in D$, продолжая оператор

$$\mathcal{U}_t \colon f \mapsto \int\limits_D f(\mathbf{y}) R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\; d\mathbf{y} \tag{2.28}$$

по изометрии (2.17) до унитарного оператора $\mathcal{U}_t \colon L_2(D) \to L_2(D)$.

2.2 Конструкция комплексного броуновского движения с отражением от границы

В этом параграфе мы построим полугруппу, действующую на $f \in W_2^2(D)$, которая даёт решение задачи Неймана

$$\begin{cases} u_t = \sigma^2 \Delta u/2,\ \mathbf{x} \in D, \\ u(0,\, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \gamma_0 \dfrac{\partial f}{\partial n}, \end{cases} \tag{2.29}$$

в том случае, когда выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\; dS(\hat{\mathbf{y}}) = 0, \tag{2.30}$$

и даёт решение некоторой вспомогательной задачи Неймана если условие разрешимости не выполнено.

Через $\chi(\mathbf{x})$ обозначим функцию

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{x^2}{2|D|d}. \tag{2.31}$$

Функция χ очевидно является бигармонической и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \chi}{\partial n}\; d\hat{\mathbf{y}} = 1. \tag{2.32}$$

Рассмотрим $f \in W_2^2(D)$. Выделим из неё бигармоническую компоненту f_b, полагая

$$f_b(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}}. \tag{2.33}$$

Из (2.32) следует, что

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}} = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f_b}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}}. \tag{2.34}$$

Функция $f_1 = f - f_b$ удовлетворяет условию разрешимости задачи Неймана (2.30). Пусть f_h – это гармоническая функция в области D, удовлетворяющая условию $\partial_n f = \partial_n f_1$.

Обозначим через $c^h_{\lambda\mu}$ коэффициенты разложения функции $\gamma_0 \partial_n f_1$ по базису $\{Y^\mu_\lambda\}$. Тогда

$$f_h(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \neq 0} c^h_{\lambda\mu} \frac{x^\lambda}{\lambda} Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.35}$$

При этом f_h принадлежит классу $W_2^2(D)$ и справедливо

$$\sum \lambda |c^h_{\lambda\mu}|^2 < \infty. \tag{2.36}$$

Для каждого $M > 0$ определим гармонический полином f_h^M, полагая

$$f_h^M(\mathbf{x}) = \sum_{0 \neq \lambda \leq M^{1/d}} c^h_{\lambda\mu} \frac{x^\lambda}{\lambda} Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.37}$$

Рассмотрим теперь функцию $f_0 = f_1 - f_h$. Ясно, что f_0 удовлетворяет $\gamma_0 \partial_n f_0 = 0$. Разложим её в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Неймана (лемма 4.6)

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c^0_m \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) = \sum c^0_{\lambda\mu k} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.38}$$

Определим функцию f_0^M, полагая

$$f_0^M(\mathbf{x}) = \sum_{m \leq M} c^0_m \widetilde{s}_m(\mathbf{x}). \tag{2.39}$$

Из леммы (4.11) следует, что f_0^M аналитическая функция d переменных. Наконец, положим

$$f^M = f_b + f_0^M + f_h^M. \tag{2.40}$$

Теперь определим полугруппу P^t, полагая для $f \in W_2^2(D)$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = (L_2) \lim_{M \to \infty} \mathbf{E}\, f^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)). \tag{2.41}$$

Для бигармонической компоненты f_b справедливо

$$\mathbf{E}\, f_b(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = \frac{\mathbf{E}\,(x + \sigma w(t))^2}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}} = f_b(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}}.$$

Ввиду гармоничности f_h, имеем

$$\mathbf{E}\, f_h^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = f_h^M(\mathbf{x}). \tag{2.42}$$

Для f_0^M, пользуясь представлением из леммы (4.11), получим

$$\mathbf{E}\, f_0^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = \sum_{m \le M} c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_m^2 t}{2}\right) \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) \tag{2.43}$$

Таким образом

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = f_b(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}} + \\ + \sum c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_m^2 t}{2}\right) \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) + f_h(\mathbf{x}). \tag{2.44}$$

Покажем, что имеет место сходимость $P^t f^M \to P^t f$:

Теорема 2.2. *Пусть $f \in W_2^2(D)$, $u(t, \mathbf{x}) = (P^t f)(\mathbf{x})$ и $u_M(t,\ \mathbf{x}) = (P^t f^M)(\mathbf{x})$. Тогда существует число $C > 0$ такое, что*

$$\sup_{t \ge 0} \|u(t,\ \cdot) - u_M(t,\ \cdot)\|_{L_2(D)} \le \frac{C}{M^{2/d}} \|f\|_{W_2^2(D)}. \tag{2.45}$$

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.1.

Получим теперь явные формулы для ядра оператора P^t. Подставляя в формулу (2.44) выражение для коэффициентов Фурье $c_m^0 = (f_0,\ \widetilde{s}_m)_{L_2(D)}$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = f_b(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\hat{\mathbf{y}} + \int f_0(\mathbf{y}) \widetilde{R}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + f_h(\mathbf{x}), \tag{2.46}$$

где

$$\widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) \overline{\widetilde{s}_m(\mathbf{y})} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_m^2 t}{2}\right). \tag{2.47}$$

Подставим в (2.46) $f_0 = f - f_b - f_h$ и $f_h = \widetilde{H}(f - f_b)$. Получим

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y}) \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int_{\partial D} (\gamma_0 \partial_n f)(\hat{\mathbf{y}})\, \widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\ \hat{\mathbf{y}})\, d\hat{\mathbf{y}}, \tag{2.48}$$

где

$$\widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}}) = \chi(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} + \widetilde{h}_0(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}}) - \\ - \int\limits_D \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\;\mathbf{u})\,\widetilde{h}_0(\mathbf{u},\;\hat{\mathbf{y}})\;d\mathbf{u} - \int\limits_D \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\;\mathbf{u})\chi(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}. \quad (2.49)$$

Вычислим четвёртое слагаемое ядра $\widetilde{Q}_t$. Первым шагом подставим в разложение $\widetilde{R}_t$ (2.44) явный вид нормированных (4.30) собственных функций:

$$\widetilde{R}_t(\mathbf{x},\,\mathbf{u}) = \sum \frac{j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})}{\widetilde{n}_{\lambda\mu k}} \frac{j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}u)\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{u}})}}{\widetilde{n}_{\lambda\mu k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}t}{2}\right). \quad (2.50)$$

Затем воспользуемся известным разложением для ядра Пуассона – Неймана

$$\widetilde{h}_0(\mathbf{u},\,\hat{\mathbf{y}}) = \sum \frac{u^\lambda}{\lambda} Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{u}})\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})} \quad (2.51)$$

и применим соотношение ортогональности для сферических гармоник (4.12) и лемму (4.9)

$$\int\limits_D \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\;\mathbf{u})\,\widetilde{h}_0(\mathbf{u},\;\hat{\mathbf{y}})\;d\mathbf{u} = \\ = \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}t/2\right)}{\widetilde{n}^2_{\lambda\mu k}} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})} \int\limits_0^1 y^{d-1}\,j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}y)\,\frac{y^\lambda}{\lambda}\;dy = \\ = \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}t/2\right)}{\widetilde{n}^2_{\lambda\mu k}} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})} \frac{j^d_{\lambda+1}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})}{\lambda\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}} \quad (2.52)$$

В случае, когда f удовлетворяет условию разрешимости (2.30), из формулы (2.49) для ядра на границе можно удалить первое, второе и пятое слагаемые. При этом получаются следующие формулы для решений:

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y})\widetilde{R}_t(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\;d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} (\gamma_0 f)(\hat{\mathbf{y}})\widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}})\,d\hat{\mathbf{y}}, \quad (2.53)$$

где

$$R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{u}) = 2\sum\left(\frac{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}}{j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})}\right)^2 \frac{\exp(-\sigma^2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}t/2)}{\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} - (\lambda+\alpha)^2} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}u)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{u}})} \quad (2.54)$$

и

$$\widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}}) = \widetilde{h}_0(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}}) - \\ - 2\sum \frac{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}}{\lambda} \frac{\exp(-\sigma^2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}t/2)}{\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} - (\lambda+\alpha)^2} \frac{j^d_{\lambda+1}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})}{\left(j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})\right)^2} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{y}})}. \quad (2.55)$$

В случае вещественного σ, как и для задачи Дирихле, формула (2.53) имеет простой вероятностный смысл. Именно, для фиксированных $(t,\, \mathbf{x})$ формула (2.53) задаёт распределение винеровского процесса в момент времени t, выпущенного из точки $x \in D$ и отражающегося от границы ∂D по нормали. Функции $\widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ естественно придать смысл накопленного к моменту t в точке $\mathbf{y}$ "скачка нормальной производной" отражающегося винеровского процесса.

2.3 Предельные теоремы

В этом параграфе мы заменим винеровский процесс его аппроксимацией нормированными суммами случайных величин и докажем теоремы о сходимости.

Пусть $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$ – последовательность независимых одинаково распределённых вещественных d-векторов с общим распределением $\mathcal{P}$. Будем предполагать, что распределение $\mathcal{P}$ инвариантно относительно поворотов, случайный вектор ξ_1 имеет единичную матрицу ковариаций, а также для некоторого $\gamma > 0$ конечен экспоненциальный момент $\mathbf{E}\, \exp(\gamma|\xi_1|)$. Пусть, кроме того, $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$. Определим сложный пуассоновский процесс $\zeta_n(t)$, полагая для $n \in \mathbb{N},\ t \in [0, T]$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{2.56}$$

Начнём с задачи Дирихле. Ввиду гармоничности f_h, имеем

$$\mathbf{E}\, f_h^M(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)) = f_h^M(\mathbf{x}). \tag{2.57}$$

Немного сложнее обстоит дело с f_0. Для доказательства аналога формулы (2.9) воспользуемся интегральным представлением из леммы (4.11):

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\, s_m(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)) = \\ &\qquad = (-i)^\lambda \frac{(d-2)!!\omega_{d-1} C_\alpha^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{p}}) e^{-i\varkappa_{\lambda k}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}}\, \mathbf{E}\, e^{-i\sigma\varkappa_{\lambda k}\hat{\mathbf{p}}\zeta_n(t)}\, d\hat{\mathbf{p}}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Пользуясь инвариантностью $\zeta_n(t)$ относительно поворотов, получаем

$$a_{\lambda k} = \mathbf{E}\, e^{-i\sigma\varkappa_{\lambda k}\hat{\mathbf{p}}\zeta_n(t)} = \exp\left(nt \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\sigma\varkappa_{\lambda k} y/\sqrt{n}} - 1 \right) \mathcal{P}_1(dy) \right), \tag{2.59}$$

где $\mathcal{P}_1$ – общее распределение случайных величин ξ_j^1 (единица в верхнем индексе указывает на то, что это первая компонента вектора ξ_j).

Окончательно, получаем

$$\mathbf{E}\, f_0^M(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)) = \sum_{m\le M} c_m^0 a_m s_m(\mathbf{x}), \tag{2.60}$$

где a_m – это числа $a_{\lambda k}$, перенумерованные так же, как соответствующие им функции s_m.

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in W_2^2(D)$, $M(n) = n^{d/4}$ *и*

$$u_n(t,\, \mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f^{M(n)}(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)). \tag{2.61}$$

Тогда существует такое число $C = C(T) > 0$, *что справедлива оценка*

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t,\, \cdot) - u_n(t,\, \cdot)\|_{L_2(D)} \le \frac{C}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)}, \tag{2.62}$$

где $u(t,\, \mathbf{x})$ *– это точное решение начально-краевой задачи Дирихле (2.1).*

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)(A+B)} B e^{\tau A}\, d\tau, \tag{2.63}$$

в которой положим $A = -\sigma^2\varkappa_m^2/2$ и

$$B = \frac{\sigma^2\varkappa_m^2 t}{2} + nt \int \left(e^{-i\sigma\varkappa_m y/\sqrt{n}} - 1\right) \mathcal{P}_1(dy) = nt \int g\left(\frac{-i\sigma\varkappa_m y}{\sqrt{n}}\right) \mathcal{P}_1(dy), \tag{2.64}$$

где

$$g(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}. \tag{2.65}$$

Нетрудно увидеть, что $|e^{tA}| \le 1$ и $|e^{t(A+B)}| \le 1$. Таким образом для оценки разности экспонент остаётся оценить B. Очевидно, что

$$\left| g\left(\frac{-i\sigma\varkappa_m y}{\sqrt{n}}\right) \right| \le \frac{\varkappa_m^4 y^4}{n^2} \exp\left(\frac{\varkappa_m |y|}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.66}$$

Поскольку мы предполагали, что у распределения $\mathcal{P}$ существует конечный экспоненциальный момент, справедливо неравенство

$$|B| \le nt \int \left| g\left(\frac{-i\sigma\varkappa_m y}{\sqrt{n}}\right) \right| \mathcal{P}_1(dy) \le \frac{C\varkappa_m^4}{n}, \tag{2.67}$$

где константа C зависит от T и распределения $\mathcal{P}_1$. Воспользуемся ещё тем, что, согласно (4.17), при $m \le M$ существует такая $C > 0$, что справедливо

$\varkappa_m^2 \le CM^{2/d}$. Оценим с помощью этого неравенства $\varkappa_m^4 = \varkappa_m^2 \varkappa_m^2 \le CM^{2/d} m^{2/d}$. Итак, из (2.63) следует, что

$$|e^{t(A+B)} - e^{tB}| \le T|B| \le \frac{Cm^{2/d} M^{2/d}}{n} \tag{2.68}$$

Оценим теперь саму L_2-норму разности:

$$\begin{aligned} \|u_n(t,\,\cdot) - u(t,\,\cdot)\|^2_{L_2(D)} &\le \sum_{m\le M} |c_m^0|^2 \left| e^{t(A+B)} - e^{tA} \right|^2 + \sum_{m>M} |c_m^0|^2 \le \\ &\le \frac{CM^{4/d}}{n^2} \sum_{m\le M} k^{4/d} |c_m^0|^2 + \frac{1}{M^{4/d}} \sum_{m>M} k^{4/d} |c_m^0|^2 \le \frac{C}{n} \|f\|^2_{W_2^2(D)}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

В последнем неравенстве мы положили $M(n) = n^{d/4}$. $\square$

Для задачи Неймана справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $f \in W_2^2(D)$ и удовлетворяет условию разрешимости (2.30). Положим $M(n) = n^{d/4}$ и*

$$u_n(t,\,\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f^{M(n)}(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)), \tag{2.70}$$

где функция $f^{M(n)}$ определена формулой (2.40).

Тогда существует такое $C = C(T) > 0$, что справедлива оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t,\,\cdot) - u_n(t,\,\cdot)\|_{L_2(D)} \le \frac{C}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)}, \tag{2.71}$$

где $u(t,\,\mathbf{x})$ – это точное решение начально-краевой задачи Неймана (2.29).

Глава 3

Операторный подход к построению разложения Скорохода вещественного броуновского движения в шаре с отражением на границе

В этой главе мы получаем аналог разложения Скорохода для отражающегося броуновского движения в шаре. Именно, мы покажем, что полугруппа отражающегося процесса отличается от полугруппы свободного процесса на некоторое операторное семейство, сосредоточенное на границе. Мы будем называть это семейство накопленным импульсом. Можно показать, что в одномерном случае это в точности стандартное локальное время на границе. Тем самым при $d = 1$ наша конструкция даёт обычное разложение Скорохода. Мы покажем, что накопленный импульс допускает потраекторное определение как для броуновского движения, так и для его аппроксимаций сложными пуассоновскими процессами, и докажем предельную теорему для таких аппроксимаций.

Результаты этой главы опубликованы в работе [41].

3.1 Операторные семейства, порождённые броуновским движением в шаре с отражением на границе

Нашей целью является построение процессов с мгновенным отражением в d-мерном шаре $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon x < 1\}$. Мы будем следовать работе [5], авторы которой предложили следующую идею. Вместо определения траекторий процесса с отражением $\widetilde{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$, мы определим операторное семейство $(P^t)_{t\geq 0}$. Каждый оператор P^t этого семейства переводит начальную функцию $f \in W_2^2(D)$ в функцию

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\widetilde{f}(\mathbf{x} + \xi(t)),$$

где $\widetilde{f}$ – это некоторое продолжение функции f до функции класса $W^2_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$. Будем считать, что это операторное семейство задаёт одномерные распределения некоторого процесса $\widetilde{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$ в том смысле, что верно равенство

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f(\widetilde{\xi}_{\mathbf{x}}(t)).$$

Так как отражающийся процесс является марковским, $(P^t)_{t\geq 0}$ определяет все конечномерные распределения.

Нам потребуются два способа продолжать начальную функцию $f \in W_2^2(D)$ до класса $W^2_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$. В стандартной конструкции (см. [26] или [25]) отражающегося броуновского движения $|w(t)|$ на $[0, \infty)$ используется формула Танаки $|w(t)| \stackrel{d}{=} w(t) + \zeta(t)$, где $\zeta(t)$ – локальное время. В нашей конструкции отражающийся процесс (аналог $|w(t)|$) будет связан с продолжением $\widetilde{f}$, заданным равенством

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_0(\mathbf{x}) + \widetilde{f}_b(\mathbf{x}) + \widetilde{f}_h(\mathbf{x}),$$

тогда как продолжение $\overline{f}$

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} (f,\, s_m) s_m(\mathbf{x})$$

будет отвечать процессу в области (аналог $w(t)$ в стандартной конструкции). По аналогии с конструкцией Скорохода, разность этих способов продолжения должна быть связана с процессом, обеспечивающим разворот траектории от границы, то есть с локальным временем.

Определим теперь две полугруппы P^t и R^t, полагая для $\mathbf{x} \in D$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, \widetilde{f}(w_{\mathbf{x}}(t)) \qquad \text{и} \qquad (R^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, \overline{f}(w_{\mathbf{x}}(t)).$$

Их генераторы выражаются через оператор $\widetilde{A} = -\Delta/2$ на области определения $D(\widetilde{A}) = W^2_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$.

Именно, генератором полугруппы P^t является оператор A с областью определения $D(A) = W_2^2(D)$ и действующий по формуле $(Af)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}\widetilde{f})(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in D$.

Генератор R^t – это оператор A^N, заданный на области определения $D(A^N) = \ker \gamma_1$ формулой $(A^N f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}\overline{f})(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in D$.

Найдём удобные формулы для разности полугрупп $P^t - R^t$ и покажем, что она действительно “сосредоточена” на границе ∂D.

Лемма 3.1. *Для $f \in L_2(D)$ справедлива формула*

$$P^t f - R^t f = (L_2) \lim_{m\to\infty} \int_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) f \, d\tau,$$

где Π_m – это ортогональный проектор на линейную оболочку первых m собственных функций.

Доказательство. Для C_0-полугруппы R^t и $f \in W_2^2(D)$, не лежащей вообще говоря в $D(A^N)$, справедливо равенство

$$R^t f - f = A^N \int\limits_0^t R^\tau f \, d\tau$$

(см. [42], теорема 2.4).

Чтобы внести оператор A^N под интеграл, воспользуемся замкнутостью оператора A^N

$$A^N = (s) \lim_{m \to \infty} A^N \Pi_m$$

и тем, что $\Pi_m f \in D(A^N)$. Получим

$$R^t f - f = (L_2) \lim_{m \to \infty} \int\limits_0^t P^\tau A^N \Pi_m f \, d\tau. \tag{3.1}$$

В этом вычислении мы, кроме прочего, учли что $\Pi_m R^\tau = R^\tau \Pi_m = P^\tau \Pi_m$.

Для оператора P^t то же самое получается автоматически, так как $f \in D(A)$

$$P^t f - f = A \int\limits_0^t P^\tau f \, d\tau = \int\limits_0^t P^\tau A f \, d\tau. \tag{3.2}$$

Вычитая формулу (3.1) из (3.2), получим утверждение леммы.

$\square$

Вычислим указанную разность и покажем, что она выражается в терминах некоторого оператора, заданного на $W_2^{1/2}(\partial D)$.

Лемма 3.2. *Для $f \in L_2(D)$ справедливо соотношение*

$$P^t f(\mathbf{x}) - R^t f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) (\gamma_1 f)(\hat{\mathbf{y}}) \, d\hat{\mathbf{y}}, \tag{3.3}$$

где

$$Q^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t R^\tau(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \, d\tau.$$

Доказательство. Для начала заметим, что $P^t f_0 - R^t f_0 = 0$, и поэтому достаточно вычислить действие разности полугрупп на $f_b + f_h$.

$$\left[A - A^N \Pi_m\right](f_h + f_b) = \widetilde{A} \left(\widetilde{f}_h + \widetilde{f}_b - \overline{\Pi_m f_h} - \overline{\Pi_m f_b} \right). \tag{3.4}$$

Заметим, что $\widetilde{A}\widetilde{f}_h = 0$. Вычислим остальные слагаемые

$$\widetilde{f}_b - \overline{\Pi_m f_h} - \overline{\Pi_m f_b} = \widetilde{f}_b - \sum_{l=0}^{m} (f_h,\, s_l)\, s_l - \sum_{l=0}^{m} (f_b,\, s_l)\, s_l =$$

$$= \int\limits_{\partial D} d\hat{\mathbf{y}}\, (\gamma_1 f)(\hat{\mathbf{y}}) \left[\chi(\mathbf{x}) - \underbrace{\sum_{l=0}^{m} (h(\cdot,\, \hat{\mathbf{y}}), s_l)\, s_l(\mathbf{x})}_{B_1} - \underbrace{\sum_{l=0}^{m} (\chi,\, s_l)\, s_l(\mathbf{x})}_{B_2} \right] \quad (3.5)$$

Вычислим B_2.

$$B_2 = \frac{1}{2|D|d} \sum_{l=0}^{m} (x^2, s_l) s_l(\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{1}{2|D|d} \sum_{l=0}^{m} (x^2 - 2x, s_l) s_l(\mathbf{x}) + \frac{1}{2|D|d} \sum_{l=0}^{m} (2x, s_l) s_l(\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2|D|d} + o(1) + \frac{1}{|D|d} \sum_{l=0}^{m} (x, s_l) s_l(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что функция $g(\mathbf{x}) = x^2 - 2x$ удовлетворяет условию Неймана, и таким образом ряд по s_m для неё сходится в L_2.

Подставим $g(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) + x/|D|d$ в формулу для B_1

$$B_1 = \sum_{l=0}^{m} (g(\cdot,\, \hat{\mathbf{y}}), s_l) s_l(\mathbf{x}) - \frac{1}{|D|d} \sum_{l=0}^{m} (x, s_l) s_l(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Нетрудно убедиться, пользуясь явным выражением для h, что функция g удовлетворяет соотношению

$$\left. \frac{\partial g}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right|_{\partial D} = \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}). \quad (3.8)$$

Коэффициент в первом слагаемом (3.7) вычисляется при помощи формулы Грина и (3.8)

$$(g(\cdot,\, \hat{\mathbf{y}}), s_l) = \frac{1}{-\varkappa_l^2} \int\limits_D g(\mathbf{z},\, \hat{\mathbf{y}}) \Delta \overline{s_l(\mathbf{z})}\, d\mathbf{z} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_l^2} \int\limits_{\partial D} \overline{s_l(\hat{\mathbf{z}})} \frac{\partial g}{\partial n_{\mathbf{z}}} (\hat{\mathbf{z}},\, \hat{\mathbf{y}})\, dS(\mathbf{z}) = \frac{1}{\varkappa_l^2} \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.7), получим

$$B_1 = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})} - \frac{1}{|D|d}\sum_{l=0}^{m}(x, s_l)s_l(\mathbf{x}). \tag{3.10}$$

Итак, для ядра в формуле (3.5) имеем

$$\chi(\mathbf{x}) - B_1 - B_2 = \frac{x}{|D|d} - \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})} + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к нулю в L_2 при $m \to \infty$.

Подействуем на предыдущее равенство оператором $P^\tau \widetilde{A}$

$$P^\tau \widetilde{A}\left(\frac{x}{|D|d} - \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})} + o(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}P^\tau \sum_{l=0}^{m} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})} + o(1) = \frac{1}{2}R^\tau(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}}) + o(1), \tag{3.11}$$

где $o(1)$ стремится к нулю в L_2 при $m \to \infty$.

$\square$

Определим оператор Q^t, полагая для $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q^t(\mathbf{x},\,\hat{\mathbf{y}})g(\hat{\mathbf{y}})\,dS(\mathbf{y}).$$

Другая полезная формула для Q^t получается из (3.1):

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty}\int\limits_0^t P^\tau(A - A^N\Pi_m)G(\mathbf{x})\,d\tau, \tag{3.12}$$

где $G(\mathbf{x}) = g_h(\mathbf{x}) + g_b(\mathbf{x})$.

Из доказанного выше следует, что справедливы теоремы 4.1, 4.2 и 4.3.

Теорема 3.1. *Операторные семейства $(R^t)_{t\geq 0}$ и $(Q^t)_{t\geq 0}$ удовлетворяют следующим эволюционным соотношениям*

$$R^{t+s} = R^t R^s,$$
$$Q^{t+s} = Q^t + R^t Q^s.$$

При этом $R^0 = I$, $Q^0 = 0$.

Теорема 3.2. *При всех $t > 0$ и $f \in D(A^N)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t}R^t f = \frac{1}{2}A^N R^t f.$$

Теорема 3.3. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t}Q^t g = \frac{1}{2}\int R^t(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}})g(\hat{\mathbf{y}})\,dS(\mathbf{y}).$$

3.2 Конструкция случайного накопленного импульса

В предыдущем параграфе мы построили операторные семейства $(R^t)_{t\geq 0}$ и $(Q^t)_{t\geq 0}$. В этом параграфе мы покажем, что есть естественный способ определить эти операторы как усреднение некоторых случайных операторов, заданных потраекторно.

Определим случайный оператор $\mathcal{P}^\tau = \mathcal{P}^\tau[w(\cdot)]$, полагая

$$(\mathcal{P}^\tau s_m)(\mathbf{x}) = e^{iw_1(\tau)\varkappa_m} s_m(\mathbf{x}), \tag{3.13}$$

$$(\mathcal{P}^\tau f_b) = \widetilde{f}_b(x + w(\tau)), \tag{3.14}$$

$$(\mathcal{P}^\tau f_h) = \widetilde{f}_h(x + w(\tau)). \tag{3.15}$$

Отметим, что в определение $\mathcal{P}^\tau$ входит только первая компонента $w_1(\tau)$ винеровского процесса $w(t)$. Это связано со сферической инвариантностью распределения $w(t)$.

Заметим, что $\mathbf{E}\,\mathcal{P}^\tau = P^\tau$, и определим оператор случайного накопленного импульса $\mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t[w(\cdot)]$, пользуясь формулой (3.12):

$$(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t \mathcal{P}^\tau (A - A^N \Pi_m) G(\mathbf{x})\, d\tau, \tag{3.16}$$

где

$$G(\mathbf{x}) = (H_0 g)(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} g(\hat{\mathbf{y}})\, dS(\mathbf{y}).$$

Теорема 3.4. *Предел в правой части* (3.16) *существует в смысле* $L_2\left(\mathcal{H}, \mu\right)$, *где* $\mathcal{H} = D \times \Omega$ *и* $d\mu = d\mathbf{x} \times d\mathbf{P}$.

Доказательство. Мы будем пользоваться формулой (3.11), в которой следует заменить P^τ на $\mathcal{P}^\tau$

$$\left(\mathcal{Q}^t g\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\partial D} \int\limits_0^t g(\hat{\mathbf{y}}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^m s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}\, dS(\mathbf{y})\, d\tau.$$

Достаточно доказать, что при каждом $t > 0$ последовательность

$$\Psi_m(\mathbf{x},\, w(\cdot)) = \int\limits_{\partial D} \int\limits_0^t g(\hat{\mathbf{y}}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^m s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}\, dS(\mathbf{y})\, d\tau$$

фундаментальна в $L_2(\mathcal{H}, \mu)$.

Пусть $m > n$. Тогда

$$\|\Psi_m - \Psi_n\|^2_{L_2(\mathcal{H},\mu)} =$$

$$= \int\limits_D \mathbf{E} \left| \int\limits_{\partial D} \int\limits_0^t g(\hat{\mathbf{y}}) \sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l w(t)} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}\, dS(\mathbf{y})\, d\tau \right|^2 d\mathbf{x} =$$

$$= \int\limits_D \mathbf{E} \left| \int\limits_0^t \sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l w(t)} g_l s_l(\mathbf{x})\, d\tau \right|^2 d\mathbf{x} \quad (3.17)$$

Нам понадобится легко проверяемая формула

$$\left| \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \right|^2 = 2 \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \operatorname{Re} \left(\overline{\varphi(\tau_1)} \varphi(\tau_2) \right) \qquad (3.18)$$

для $\varphi \in L_1[0,t]$.

Используя (3.18), получаем

$$\mathbf{E} \int\limits_D \left| \int_0^t \sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l w(t)} g_l s_l(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} =$$

$$= 2\mathbf{E} \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \operatorname{Re} \left(\sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l \left(w(\tau_2) - w(\tau_1) \right)} |g_l|^2 \right) =$$

$$= 2 \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \operatorname{Re} \left(\sum_{l=n+1}^m e^{-\varkappa_l^2 (\tau_2 - \tau_1)/2} |g_l|^2 \right)$$

Имеем

$$\|\Psi_m - \Psi_n\|^2_{L_2(\mathcal{H},\mu)} \le Ct \sum_{l=n+1}^m \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^2}.$$

Покажем, что выражение в предыдущей формуле стремится к нулю. Для этого заметим, что $g = \gamma_1 G$, где $G = g_h + g_b \in W_2^2(D)$. Поскольку, как известно, $D(A^N) = W_2^1(D)$ (см. [43], стр. 263), верно $\sqrt{-A^N} G \in L_2(D)$. По формуле Грина имеем

$$g_l = \int\limits_{\partial D} (\gamma_1 G)(\hat{\mathbf{y}}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}\, d\hat{\mathbf{y}} = \int\limits_D \nabla G\, \overline{\nabla s_l}\, d\mathbf{y} =$$

$$= \left(\sqrt{-A^N} G,\, \sqrt{-A^N} s_l \right) = \varkappa_l \left(\sqrt{-A^N} G,\, s_l \right).$$

Таким образом

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \left| \left(\sqrt{-A^N} G,\, s_l \right) \right|^2 \le \infty.$$

□

Покажем, что оператор Q^t получается как усреднение операторов $\mathcal{Q}^t$ по траекториям $w(\cdot)$.

Теорема 3.5. *Для любой функции* $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ *выполнено*

$$\mathbf{E} \left(\mathcal{Q}^t g \right)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Для доказательства снова воспользуемся формулой (3.11), в которой следует заменить P^τ на $\mathcal{P}^\tau$

$$\mathbf{E} \left(\mathcal{Q}^t g \right)(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \int_{\partial D} \int_0^t g(\hat{\mathbf{y}}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^{m} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}\, dS(\mathbf{y})\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \int_{\partial D} \int_0^t g(\hat{\mathbf{y}} \sum_{l=0}^{m} \mathbf{E}\, e^{i\varkappa_l w(t)} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})}\, dS(\mathbf{y})\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial D} \int_0^t R^\tau(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) g(\hat{\mathbf{y}})\, dS\mathbf{y})\ d\tau = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

□

3.3 Случайное блуждание в шаре с отражением на границе

Построение операторных семейств, порождённых случайным блужданием

В этом разделе мы построим операторные семейства P_n^t и Q_n^t, а так же их случайные аналоги $\mathcal{P}_n^t$ и $\mathcal{Q}_n^t$, для процесса

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j,$$

где $(\xi_j)_{j\ge1}$ – н.о.р. случайные d-вектора с общим распределением $\mathcal{P}$, инвариантным относительно вращений, и $\mathbf{E}\,(\xi_1^1)^2 = 1$ (верхний индекс указывает на номер компоненты), а $(\eta(t))_{t\geq 0}$ – не зависящий от них стандартный пуассоновский процесс.

Положим для $f \in W_2^2(D)$ и $\mathbf{x} \in D$

$$(P_n^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\widetilde{f}(\mathbf{x} + \zeta_n(t)) \qquad \text{и} \qquad (R_n^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\overline{f}(\mathbf{x} + \zeta_n(t)).$$

Так же как в случае винеровского процесса генераторы A и A^N двух полугрупп выражались в терминах оператора $\widetilde{A} = -\Delta/2$ в $W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^d)$, операторы A_n и A_n^N представляются в виде

$$(A_n f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}_n \widetilde{f})(\mathbf{x}) \qquad \text{и} \qquad (A_n^N f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}_n \overline{f})(\mathbf{x}),$$

где оператор $\widetilde{A}_n$, заданный на $D(\widetilde{A}_n) = W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^d)$, действует по формуле

$$(\widetilde{A}_n f)(\mathbf{x}) = 2n \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(f\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{n}} \right) - f(\mathbf{x}) \right) \mathcal{P}(d\mathbf{y}).$$

При этом $D(A_n) = D(A) = W_2^2(D)$ и $D(A_n^N) = D(A^N) = \ker \gamma_1$.

Можно показать (см. [39]), что

$$(A_n s_m)(\mathbf{x}) = -\lambda_m^n s_m(\mathbf{x}),$$

где

$$\lambda_m^n = -2n \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{i\varkappa_m y/\sqrt{n}} - 1 \right) \mathcal{P}_1(dy).$$

Относительно чисел λ_m^n справедливо утверждение.

Лемма 3.3. *1) При любом фиксированном n последовательность $(\lambda_m^n)_{m\geq 0}$ ограничена.*

2) При любом фиксированном j

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m^n = \varkappa_m^2.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше для винеровского процесса, доказывается следующая лемма.

Лемма 3.4. *Справедлива формула*

$$P_n^t f - R_n^t f = (s) \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) f \, d\tau, \tag{3.19}$$

где $(s)\lim$ – это сильный предел в $L_2(D)$.

Аналог леммы (3.2) выглядит несколько иначе. Вплоть до формулы (3.11) вычисления проводятся точно так же, как там, с точностью до замены P^τ и $\widetilde{A}$ на P^τ_n и $\widetilde{A}_n$ соответственно. Имеем

$$P^\tau_n \widetilde{A}_n \left(\frac{x}{|D|d} - \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})} + o(1) \right) = \\ = \frac{1}{2} P^\tau \sum_{l=0}^{m} \frac{\lambda_l^n}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\hat{\mathbf{y}})} + o(1) = \frac{1}{2} \widetilde{R}^\tau_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) + o(1), \quad (3.20)$$

где

$$\widetilde{R}^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \sum \frac{\lambda_m^n}{\varkappa_m^2} e^{-\lambda_m^n t/2} s_m(\mathbf{x}) \overline{s_m(\hat{\mathbf{y}})}.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 3.5. *Справедливо соотношение*

$$P^t_n f(\mathbf{x}) - R^t_n f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q^t_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})(\gamma_1 f)(\hat{\mathbf{y}})\, dS(\mathbf{y}), \quad (3.21)$$

где

$$Q^t(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \widetilde{R}^\tau_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})\, d\tau.$$

Из доказанного выше следует, что справедливы теоремы 3.6, 3.7 и 3.8.

Теорема 3.6. *Операторные семейства $(R^t_n)_{t\geq 0}$ и $(Q^t_n)_{t\geq 0}$ удовлетворяют следующим эволюционным соотношениям*

$$R^{t+s}_n = R^t_n R^s_n,$$
$$Q^{t+s}_n = Q^t_n + \widetilde{R}^t_n Q^s_n.$$

При этом $R^0_n = I$, $Q^0_n = 0$.

Теорема 3.7. *При всех $t > 0$ и $f \in D(A^N_n)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} R^t_n f = \frac{1}{2} A^N_n R^t_n f.$$

Теорема 3.8. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t_n g = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \widetilde{R}^t_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) g(\hat{\mathbf{y}})\ dS(\widehat{\mathbf{y}})\,.$$

Далее, по аналогии с (3.13) определим случайный оператор $\mathcal{P}_n^\tau = \mathcal{P}_n^\tau[\zeta_n(\cdot)]$, полагая

$$(\mathcal{P}_n^\tau s_m)(\mathbf{x}) = e^{i\zeta_n^1(\tau)\varkappa_m} s_m(\mathbf{x}), \tag{3.22}$$

$$(\mathcal{P}_n^\tau f_b) = \widetilde{f}_b(x + \zeta_n(\tau)), \tag{3.23}$$

$$(\mathcal{P}_n^\tau f_h) = \widetilde{f}_h(x + \zeta_n(\tau)). \tag{3.24}$$

Отметим, что в силу сферической инвариантности распределения ζ_n достаточно определить $\mathcal{P}_n^\tau$ пользуясь только первой компонентой ζ_n.

Заметим, что $\mathbf{E}\,\mathcal{P}_n^\tau = P_n^\tau$, и определим оператор случайного накопленного импульса $\mathcal{Q}_n^t = \mathcal{Q}_n^t[\zeta_n(\cdot)]$, пользуясь формулой (3.12):

$$(\mathcal{Q}_n^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t \mathcal{P}_n^\tau (A_n - A_n^N \Pi_m) G(\mathbf{x})\, d\tau, \tag{3.25}$$

где

$$G(\mathbf{x}) = (Hg)(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} g(\hat{\mathbf{y}})\, dS(\mathbf{y})\,.$$

Справедливо утверждение об усреднении $\mathcal{Q}_n^t$, аналогичное 3.5.

Теорема 3.9. *Для любой функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ выполнено*

$$\mathbf{E}\,\left(\mathcal{Q}_n^t g\right)(\mathbf{x}) = (Q_n^t g)(\mathbf{x}).$$

3.4 Предельные теоремы о сходимости операторов

Покажем теперь, что операторы R_n^t и Q_n^t сильно сходятся при $n \to \infty$ к R^t и Q^t.

Теорема 3.10. *Пусть $f \in D(A^N)$. Тогда*

$$\left\|R_n^t f - R^t f\right\|_{L_2(D)} \le \frac{C\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)}.$$

Доказательство. Так как f принадлежит $D(A^N)$, справедливо равенство

$$\|R_n^t f - R^t f\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{m=0}^\infty |(f, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2}\right|^2 \le$$

$$\le \underbrace{\sum_{m\le M} |(f, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2}\right|^2}_{I_1} + \underbrace{4\sum_{m>M} |(f, s_m)|^2}_{I_2},$$

где $M = M(n,t)$ выберем позже.

Согласно (4.21), при $m \le M$ справедливо неравенство $\varkappa_m^2 \le CM^{2/d}$ с некоторой константой $C > 0$. Нетрудно видеть (см. [39]), что

$$\left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right| \le \frac{C\varkappa_m^4}{n} \le \frac{CM^{2/d} m^{2/d}}{n}.$$

Тогда

$$I_1 \le \frac{CM^{4/d}}{n^2} \sum_{m \le M} m^{4/d} |(f, s_m)|^2 \le \frac{CM^{4/d}}{n^2} \|f\|^2_{W_2^2(D)}.$$

Для суммы I_2 имеем

$$I_2 \le \frac{1}{M^{4/d}} \sum_{m > M} m^{4/d} |(f, s_m)|^2 \le \frac{C}{M^{4/d}} \|f\|^2_{W_2^2(D)}.$$

Окончательно,

$$\|R_n^t f - R^t f\|^2_{L_2(D)} \le C \left(\frac{M^{4/d}}{n^2} + \frac{1}{M^{4/d}} \right) \|f\|^2_{W_2^2(D)} \le \frac{Ct}{n} \|f\|^2_{W_2^2(D)}$$

при $M = (n/t)^{d/4}$. □

Теорема 3.11. *Справедливо равенство*

$$R^t = (s) \lim_{n \to \infty} R_n^t,$$

где $(s)\lim$ *– это сильный предел в* L_2.

Данное утверждение следует из предыдущей теоремы и теоремы Банаха-Штейнгауза.

Докажем теперь, что операторы Q_n^t сходятся к Q^t.

Теорема 3.12. *Существует такое число* $C > 0$, *что для любой функции* $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ *выполнено неравенство*

$$\|Q_n^t g - Q^t g\|^2_{L_2(D)} \le \frac{Ct^{3/8}}{n^{3/8}} \|g\|^2_{W_2^{1/2}(\partial D)}.$$

Доказательство. По функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ построим $G = g_h + g_b \in W_2^2(D)$, полагая

$$G(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} g(\hat{\mathbf{y}}) \big(\chi(\mathbf{x}) + h_0(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \big) \, dS(\mathbf{y}) \, .$$

Используя (3.21) и (3.12), получаем

$$\|Q_n^t g - Q^t g\|^2_{L_2(D)} = \|R_n^t G - R^t G\|^2_{L_2(D)}.$$

Можно показать, для существует следующая двусторонняя оценка нормы $\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial D)}$

$$\|g\|^2_{W_2^{1/2}(\partial D)} \asymp \sum m^{1/d} |(G, s_m)|^2$$

Для некоторого $M = M(n, t)$, которое мы подберём позже, имеем

$$\|R_n^t G - R^t G\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m=0}^{\infty} |(G, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right|^2 =$$

$$= \sum_{m \le M} |(G, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right|^2 + 4 \sum_{m > M} |(G, s_m)| \le$$

$$\le \frac{CM^{3/d}}{n^2} \sum_{m \le M} m^{1/d} |(G, s_m)|^2 + \frac{1}{M^{1/d}} \sum_{m > M} m^{1/d} |(G, s_m)|^2 \le$$

$$\le C \left(\frac{M^{3/d}}{n^2} + \frac{1}{M^{1/d}} \right) \|g\|^2_{W_2^{1/2}(\partial D)} = \frac{Ct^{3/4}}{n^{3/4}} \|g\|^2_{W_2^{1/2}(\partial D)}.$$

В последнем равенстве мы положили $M = (n/t)^{1/4}$. □

Глава 4

Конструкция симметричных скачкообразных процессов Леви в гладких ограниченных областях с отражением на границе

В последней части работы мы построим отражающуюся версию симметричного чисто скачкообразного процесса Леви в произвольной гладкой ограниченной области. Как и в случае броуновского движения, разность полугрупп свободного процесса и процесса с отражением окажется сосредоточена на границе. Далее мы построим оператор случайного накопленного импульса. Наконец, мы коротко скажем какие изменения следует внести в конструкцию в случае симметричных устойчивых процессов.

Результаты настоящей главы опубликованы в работе [44].

4.1 Операторные семейства, порождённые скачкообразным процессом Леви с отражением на границе

Идею данного параграфа можно изложить в двух словах, хотя её формальное изложение потребует некоторых усилий. К каждой точке $\mathbf{x} \in D$ привяжем шаровую окрестность $\mathbf{x}+D(\mathbf{x}) \Subset D$, где $D(\mathbf{x})$ – шар радиуса $r(\mathbf{x}) > 0$ с центром в нуле. Для функции $f \in W_2^2(D)$ построим в каждой окрестности последовательность *касательных* функций $\widetilde{f_M}(\mathbf{x}, \cdot)$, $M \in \mathbb{N}$, сходящуюся в этой окрестности к f. При этом последовательность f_M мы построим так, что каждая из функций f_M в отличие от f будет определена во всём $\mathbb{C}^d$, и лежит в области определения оператора L. С помощью такой последовательности касательных функций мы определим действие оператора A на f, полагая

$$Af(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} L_{\mathbf{y}} f_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Big|_{\mathbf{y}=0}.$$

Такие касательные семейства мы будем несколько неаккуратно называть продолжениями функции f. Разумеется, таких касательных семейств существует бесконечно много. Как отмечалось во введении, нам потребуется не одно, а два таких продолжения (и два оператора соответственно), при этом роль последовательностей $\widetilde{f}_M$ и $\overline{f}_M$ будут играть частичные суммы специально выбранных рядов.

Построение касательного семейства начнём с разложения начальной функции $f \in W_2^2(D)$ по лемме 4.13:

$$f = f_0 + f_b + f_h,$$

где $f_0 \in \mathcal{N}^0(D)$, $f_h \in G_2^2(D)$ и $f_b = a(f, \chi)\chi$. Рассмотрим сначала гармоническую часть f_h. Для любого вектора $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x})$, имеет место равенство

$$f_h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum (f_h, Y_\lambda^\mu) \left(\frac{y}{r(\mathbf{x})} \right)^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}}),$$

где скалярное произведение берётся в $L_2(\partial(\mathbf{x}+D(\mathbf{x}))$. Ряд сходится равномерно, и хотя сама сумма ряда зависит только от суммы $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, частичные суммы

$$f_{hM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\lambda \le M} (f_h, Y_\lambda^\mu) \left(\frac{y}{r(\mathbf{x})} \right)^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}}), \quad M \in \mathbb{N},$$

зависят от $\mathbf{x} \in D$ и $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x})$ по отдельности. Кроме того, $f_{hM}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ как функция $\mathbf{y}$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}^d$. При этом для $\mathbf{y} \notin D(\mathbf{x})$ предела при $M \to \infty$ вообще говоря нет. Заметим также, что $f_{hM}(\mathbf{x}, 0) = f_h(\mathbf{x})$ при всех $M \in \mathbb{N}$.

Далее, построим продолжение функции f_0. Для этого воспользуемся её разложением в ряд по s_m, а затем переразложим в этом ряду сами функции s_m. Как в случае f_h, для $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x})$ имеет место равенство

$$s_m(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum c_{m\lambda\mu}(\mathbf{x}) j_\lambda^d(\varkappa_m y) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}}),$$

причём ряд сходится равномерно. Обозначим частичные суммы этого ряда через $s_{mM}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для $\mathbf{x} \in D$ и $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x})$

$$s_{mM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\lambda \le M} c_{m\lambda\mu}(\mathbf{x}) j_\lambda^d(\varkappa_m y) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}}).$$

По второму аргументу функция s_{mM} имеет аналитическое продолжение в $\mathbb{C}^d$, а также при всех $M \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $s_{mM}(\mathbf{x}, 0) = s_m(\mathbf{x})$. Так как $s_{mM} \in D(L)$, а так же в силу формулы (4.36), функции s_m являются собственными функциями L, отвечающими одному и тому же собственному значению $L(\varkappa_m)$. При всех $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d$ справедливо равенство

$$-L_{\mathbf{y}} s_{mM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\varkappa_m) s_{mM}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Определим теперь частичную сумму $f_{0M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$:

$$f_{0M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{m\le M}(f_0,s_m)s_{mM}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}\in D, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^d.$$

Так как $s_{mM}(\mathbf{x},0)=s_m(\mathbf{x})$, имеет место сходимость

$$f_{0M}(\cdot,0)\to f_0 \text{ в } W_2^2(D) \text{ при } M\to\infty.$$

Вопрос сходимости $f_{0M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ к f_0 является более сложным и по всей видимости требует дополнительных знаний о поведении собственных функций.

Наконец, определим первое продолжение $\widetilde{f}_M$, полагая для $\mathbf{x}\in D$ и $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^d$

$$\widetilde{f}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_b(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + f_{hM}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f_{0M}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Выражения $\widetilde{f}_M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ могут не иметь пределов при $\mathbf{y}\notin D(\mathbf{x})$. Сходимость внутри шара $\mathbf{y}\in D(\mathbf{x})$ требует дополнительного исследования собственных функций s_m, однако при $\mathbf{y}=0$ из того, что $f_0\in\mathcal{N}(D)$ и $s_{mM}(\mathbf{x},0)=s_m(\mathbf{x})$ следует, что

$$\widetilde{f}_M(\cdot,0)\to f \text{ при } M\to\infty \text{ в } W_2^2(D).$$

Второе разложение $\overline{f}_M$ построим, разлагая f в ряд по s_m. Положим для $\mathbf{x}\in D$ и $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^d$

$$\overline{f}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{m\le M}(f,s_m)s_{mM}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Как отмечалось выше, разложение функции f по s_m сходится лишь в $W_2^1(D)$, но не в $W_2^2(D)$:

$$\overline{f}_M(\cdot,0)\to f \text{ при } M\to\infty \text{ в } W_2^1(D).$$

Заметим, что так определённые функции $\widetilde{f}_M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\overline{f}_M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ лежат в области определения $D(L)$ по переменной $\mathbf{y}$. Определим по ним две полугруппы, полагая для $\mathbf{x}\in D$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty}\mathbb{E}\widetilde{f}_M\left(\mathbf{x},\xi(t)\right) \text{ и } (R^t f)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty}\mathbb{E}\overline{f}_M\left(\mathbf{x},\xi(t)\right).$$

Генераторы этих полугрупп выражаются через генератор $-L$ “свободного” процесса Леви ξ (формула (0.4)). Именно, генератор $-A$ полугруппы P^t действует на области определения $D(A)=W_2^2(D)$ по формуле

$$(Af)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty}(L\widetilde{f}_M)(\mathbf{x},0) \text{ при } \mathbf{x}\in D.$$

Оператор L здесь и далее действует по второй переменной.

Генератор $-A^N$ полугруппы R^t действует на области определения $D(A^N)=\mathcal{N}(D)\subset W_2^2(D)$ по формуле

$$(A^N f)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty}(L\overline{f}_M)(\mathbf{x},0) \text{ при } \mathbf{x}\in D.$$

4.2 Граничный оператор

В настоящем параграфе мы покажем, что разность полугрупп P^t и R^t сосредоточена на границе области ∂D. Это утверждение является аналогом того факта, что процесс локального времени живёт на границе.

Имея эту задачу в виду, найдём удобные формулы для разности полугрупп.

Лемма 4.1. *Для $f \in W_2^2(D)$ и $\mathbf{x} \in D$ справедливо соотношение*

$$(P^t f)(\mathbf{x}) - (R^t f)(\mathbf{x}) = - \lim_{M\to\infty} \int_0^t P^\tau L\Big(\widetilde{f}_M - \overline{f}_M\Big)(\mathbf{x}, 0)\, d\tau\,.$$

Указанный предел существует также в смысле $W_2^2(D)$.

Доказательство. Для функции $f \in W_2^2(D)$, вообще говоря не лежащей в области определения генератора $-A^N$ полугруппы R^t можно написать (см. [42], теорема 2.4)

$$R^t f - f = -A^N \int_0^t R^\tau f\, d\tau,$$

однако внести генератор $-A^N$ под интеграл нельзя. Для этого заменим функцию f её аппроксимацией в нужном классе

$$f_M = \sum_{m\le M} (f, s_m) s_m.$$

Так как $R^\tau f = (L_2) \lim R^\tau f_M$, получим

$$R^t f - f = -A^N \lim_{M\to\infty} \int_0^t R^\tau f_M\, d\tau\,.$$

Воспользуемся теперь замкнутостью оператора A^N, из которой следует, что

$$A^N \lim_{M\to\infty} f_M = \lim_{M\to\infty} A^N f_M \text{ в } L_2(D)$$

чтобы внести генератор в интеграл

$$R^t f - f = - \lim_{M\to\infty} \int_0^t R^\tau A^N f_M\, d\tau\,.$$

Из определения оператора A^N и того факта, что $\overline{(f_M)}_M(\mathbf{x}, 0) = f_M(\mathbf{x}, 0)$ следует равенство $A^N f_M(\mathbf{x}, 0) = L f_M(\mathbf{x}, 0)$. Таким образом мы доказали

$$(R^t f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = - \lim_{M\to\infty} \int_0^t R^\tau L f_M(\mathbf{x}, 0)\, d\tau\,.$$

Так как генератор $-A$ полугруппы P^t определён во всём пространстве $W_2^2(D)$, мы можем сразу написать

$$P^t f - f = -\int_0^t P^\tau A f \, d\tau \,.$$

Воспользуемся определением оператора A чтобы получить

$$(P^t f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = -\lim_{M\to\infty}\int_0^t P^\tau L \widetilde{f}_M(\mathbf{x},0)\, d\tau \,.$$

Для завершения доказательства остаётся вычесть из формулы для P^t формулу для R^t. При этом под интегралом в формуле для R^t можно заменить R^τ на P^τ, тогда как в формуле для P^t такую замену сделать вообще говоря нельзя. $\square$

Пользуясь доказанной леммой, вычислим разность полугрупп и покажем, что она выражается в терминах некоторого оператора, заданного на $W_2^{1/2}(D)$.

Лемма 4.2. *Для $f \in W_2^2(D)$ справедливо соотношение*

$$(P^t f)(\mathbf{x}) - (R^t f)(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} Q^t(\mathbf{x},\mathbf{z})(\gamma_1 f)(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z}),$$

где

$$Q^t(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{R}^\tau(\mathbf{x},\mathbf{z})\, d\tau$$

и

$$\widetilde{R}^\tau(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} e^{-tL(\varkappa_l)} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\mathbf{z})}.$$

Доказательство. Для начала вычислим разность продолжений

$$\widetilde{f}_M(\mathbf{x}) = f_b(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + f_{hM}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f_{0M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

и

$$\overline{f}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{(f_b)}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \overline{(f_h)}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \overline{(f_0)}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

стоящую под интегралом. Заметим, что на f_0 продолжения совпадают:

$$\widetilde{f}_{0M} - \overline{(f_0)}_{0M} = 0.$$

а значит разность полугрупп требуется вычислять лишь на сумме $f_h + f_b$. Выбросим слагаемые f_{hM}, так как $L\,\widetilde{f}_{hM}(\mathbf{x},0) = 0$.

Теперь нам достаточно найти выражение для разности $f_b - \overline{(f_b)}_M - \overline{(f_h)}_M$. Перепишем явно все три функции в терминах интегралов по границе от $\gamma_1 f$. Для f_h имеем:

$$f_h(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} dS(\mathbf{z})(\gamma_1 f)(\mathbf{z}) \left[h(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \int_{\partial D} dS(\mathbf{w})(\gamma_1\chi)(\mathbf{w}) h(\mathbf{x},\mathbf{w}) \right].$$

Следовательно,

$$\overline{(f_h)}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{\partial D} dS(\mathbf{z})(\gamma_1 f)(\mathbf{z})\varphi_M(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

где

$$\varphi_M(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{l=0}^{M}\left(h(\cdot,\mathbf{z}) - \int_{\partial D} dS(\mathbf{w})\, h(\cdot,\mathbf{w})(\gamma_1\chi)(\mathbf{w}), s_l\right) s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Для f_b:

$$\overline{(f_b)}_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{\partial D} dS(\mathbf{z})(\gamma_1 f)(\mathbf{z})\psi_M(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

где

$$\psi_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{l=0}^{M}(\chi, s_l)s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Теперь нам необходимо вычислить разность

$$\chi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi_M(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) - \psi_M(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Запишем отдельно сумму $\varphi_M + \psi_M$ в следующем виде:

$$\varphi_M(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) + \psi_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$
$$= \sum_{l=0}^{M}\left(\chi(\cdot) - \int_{\partial D} dS(\mathbf{w})(\gamma_1\chi)(\mathbf{w})h(\cdot,\mathbf{w}), s_l\right) s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y}) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{M}\Big(h(\cdot,\mathbf{z}), s_l\Big)s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Функция

$$\theta(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) - \int_{\partial D} dS(\mathbf{w})(\gamma_1\chi)(\mathbf{w})h(\mathbf{x},\mathbf{w})$$

лежит в $\mathcal{N}(D)$, а значит ряд по s_l сходится к ней в $W_2^2(D)$. Учитывая это, получаем

$$\sum_{l=0}^{M}(\theta, s_l)\, s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{x}) - \int_{\partial D} dS(\mathbf{w})(\gamma_1\chi)(\mathbf{w})h(\mathbf{x},\mathbf{w}) + r_M^{(0)}(\mathbf{x}) + r_M^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

где остаточные члены $r_M^{(0,1)}$ равны

$$r_M^{(0)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=M+1}^{\infty}(\theta, s_m)s_m(\mathbf{x}), \quad r_M^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{l=0}^{M}(\theta, s_m)\Big(s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - s_l(\mathbf{x})\Big).$$

Для вычисления последнего слагаемого нам потребуется соотношение

$$\Big(h(\cdot,\mathbf{z}),s_l\Big)=\frac{1}{\varkappa_l^2}\,\overline{s_l(\mathbf{z})},$$

которое нетрудно проверить при помощи формулы Грина.

Итак, мы получили формулу для разности

$$\chi(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\varphi_M(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})-\psi_M(\mathbf{x},\mathbf{y})=$$

$$=\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\mathbf{z})}+\int_{\partial D}dS(\mathbf{w})(\gamma_1\chi)(\mathbf{w})h(\mathbf{x},\mathbf{w})+$$

$$+r_M^{(0)}(\mathbf{x})+r_M^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y})+r_M^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$$

где остаточный член $r_M^{(2)}$ равен

$$r_M^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{\varkappa_l^2}\Big(s_{lM}(\mathbf{x},\mathbf{y})-s_l(\mathbf{x})\Big)\overline{s_l(\mathbf{z})}.$$

Подействуем теперь на полученное равенство оператором $-L$ и положим $\mathbf{y}=0$. Так как второе слагаемое является гармонической функцией, получим

$$-L_{\mathbf{y}}\Big(\chi(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\varphi_M(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})-\psi_M(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)\Big|_{\mathbf{y}=0}=$$

$$=\sum_{l=0}^{M}\frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\mathbf{z})}+Lr_M^{(0)}(\mathbf{x}).$$

В этой формуле мы учли, что второй и третий остаточные члены тождественно равны нулю, так как $s_{lM}(\mathbf{x},0)=s_l(\mathbf{x})$.

Таким образом мы получили формулу для разности полугрупп

$$(P^tf)(\mathbf{x})-(R^tf)(\mathbf{x})=$$

$$=(W_2^2)\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{\partial D}dS(\mathbf{z})\;(\gamma_1 f)(\mathbf{z})\;P^\tau\left(\sum_{l=0}^{M}\frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\mathbf{z})}\right),\quad(4.1)$$

так как остаточный член

$$R_M(\mathbf{x})=\int_0^t d\tau\int_{\partial D}dS(\mathbf{z})(\gamma_1 f)(\mathbf{z})P^\tau Lr_M^{(0)}(\mathbf{x})$$

стремится к нулю в $W_2^2(D)$. Действительно,

$$R_M(\mathbf{x})=C_f\sum_{l=M+1}^{\infty}c_l(\theta,s_l)s_l(\mathbf{x}),$$

где $c_l = 1 - \exp(-tL(\varkappa_l)) \le 1$, а ряд для θ сходится в $W_2^2(D)$ как было отмечено выше. $\square$

Определим оператор Q^t, полагая для $g \in W_2^{1/2}(D)$

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} Q^t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})\,.$$

Другая полезная формула получается из предыдущей леммы. Построим по $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ функцию $G_b \in \chi \cdot \mathbb{C}$

$$G_b(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \int_{\partial D} g(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z}) \tag{4.2}$$

и $G_h \in G_2^2(D)$

$$G_h(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) g(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})\,. \tag{4.3}$$

Тогда $G = G_b + G_h \in W_2^2(D)$, и оператор Q^t действует на g как

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{M \to \infty} \int_0^t P^\tau L\Big(\widetilde{G}_M - \overline{G}_M\Big)(\mathbf{x}, 0)\, d\tau\,. \tag{4.4}$$

Из доказанного выше следует, что справедливы теоремы 4.1, 4.2 и 4.3.

Теорема 4.1. *Операторные семейства $(R^t)_{t \ge 0}$ и $(Q^t)_{t \ge 0}$ удовлетворяют следующим эволюционным соотношениям*

$$\begin{aligned} R^{t+s} &= R^t R^s, \\ Q^{t+s} &= Q^t + \widetilde{R}^t Q^s. \end{aligned}$$

При этом $R^0 = I$, $Q^0 = 0$.

Теорема 4.2. *При всех $t > 0$ и $f \in L_2(D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} R^t f = \frac{1}{2} A^N R^t f.$$

Теорема 4.3. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t g = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \widetilde{R}^t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})\,.$$

4.3 Конструкция случайного накопленного импульса

В предыдущем параграфе мы построили операторные семейства $(R^t)_{t\geq 0}$ и $(Q^t)_{t\geq 0}$. Теперь мы покажем, что есть естественный способ определить их как усреднение некоторых случайных операторов, заданных потраекторно.

Определим случайный оператор $\mathcal{P}^\tau = \mathcal{P}^\tau[\xi(\cdot)]$ на области определения $W_2^2(D) = \mathcal{N}^0(D) \oplus BG_2^{2,0}(D)$, полагая для $f \in \mathcal{N}^0(D)$

$$(\mathcal{P}^\tau f)(\mathbf{x}) = \sum e^{i\varkappa_m \xi_1(\tau)}(f, s_m) s_m(\mathbf{x}),$$

и для $f \in BG_2^{2,0}(D)$

$$(\mathcal{P}^\tau f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \xi(\tau)).$$

Очевидно, что $P^t = \mathbb{E}\mathcal{P}^t$. Мы могли бы определить оператор $\mathcal{P}^\tau$ как сдвиг на $\xi(\tau)$ на всём $W_2^2(D)$, и при этом свойство $P^t = \mathbb{E}\mathcal{P}^\tau$ сохранилось бы, так как

$$\mathbb{E}e^{i\varkappa_m \xi_1(\tau)} s_m(\mathbf{x}) = e^{-\tau L(\varkappa_m)} s_m(\mathbf{x}) = \mathbb{E}s_m(\mathbf{x} + \xi(\tau)),$$

однако данное определение оказывается удобнее с вычислительной точки зрения. Отметим, что в определение $\mathcal{P}^\tau$ входит только первая компонента $\xi_1(\tau)$ процесса $\xi(t)$. Это связано со сферической инвариантностью процесса ξ.

Определим теперь оператор $\mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t[\xi(\cdot)]$, пользуясь формулой (4.4):

$$(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} \int_0^t \mathcal{P}^\tau L\Big(\widetilde{G}_M - \overline{G}_M\Big)(\mathbf{x}, 0)\, d\tau, \tag{4.5}$$

где $G = G_b + G_h \in W_2^2(D)$, а G_b и G_h определены формулами (4.2), (4.3).

Теорема 4.4. *Предел в правой части* (4.5) *существует в смысле* $L_2(\mathcal{H}, \mu)$, *где* $\mathcal{H} = D \times \Omega$ *и* $d\mu = d\mathbf{x} \times d\mathbf{P}$.

Доказательство. Будем пользоваться формулой (4.4), в которой следует заменить P^τ на $\mathcal{P}^\tau$:

$$(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \int_{\partial D} \int_0^t g(\mathbf{z}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^{M} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\mathbf{z})}\, dS(\mathbf{z})\, d\tau\,.$$

Достаточно доказать, что при каждом $t > 0$ последовательность

$$\Psi_m(\mathbf{x}, \xi(\cdot)) = \int_{\partial D} \int_0^t g(\widehat{\mathbf{y}}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^{M} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\mathbf{z})}\, dS(\mathbf{z})\, d\tau$$

фундаментальна в $L_2(\mathcal{H}, \mu)$.

Рассмотрим норму разности $\Psi_m - \Psi_n$, $m > n$

$$\|\Psi_m - \Psi_n\|^2_{L_2(\mathcal{H},\mu)} =$$

$$= \int_D \mathbb{E}\left|\int_{\partial D}\int_0^t g(\mathbf{z}) \sum_{l=n+1}^{m} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2}\mathcal{P}^\tau s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\mathbf{z})}\, dS(\mathbf{z})\, d\tau\right|^2 d\mathbf{x} =$$

$$= \int_D \mathbb{E}\left|\int_0^t \sum_{l=n+1}^{m} e^{i\varkappa_l \xi_1(\tau)} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} g_l s_l(\mathbf{x})\, d\tau\right|^2 d\mathbf{x},$$

где

$$g_l = \int_{\partial D} g(\mathbf{z})\overline{s_l(\mathbf{z})}\, dS(\mathbf{z})\,.$$

Нам понадобится легко проверяемая формула

$$\left|\int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau\right|^2 = 2\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \,\mathrm{Re}\left(\overline{\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)}\right)$$

для $\varphi \in L_1[0,t]$. Используя её, получаем

$$\int_D \mathbb{E}\left|\int_0^t \sum_{l=n+1}^{m} e^{i\varkappa_l \xi_1(\tau)} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} g_l s_l(\mathbf{x})\, d\tau\right|^2 d\mathbf{x} = \tag{4.6}$$

$$= 2\mathbb{E}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \,\mathrm{Re}\left(\sum_{l=n+1}^{m} e^{i\varkappa_l(\xi_1(\tau_2)-\xi_1(\tau_1))}\frac{L^2(\varkappa_l)}{\varkappa_l^4}|g_l|^2\right) = \tag{4.7}$$

$$= 2\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \,\mathrm{Re}\left(\sum_{l=n+1}^{m} e^{-(\tau_2-\tau_1)L(\varkappa_l)}\frac{|L(\varkappa_l)|^2}{\varkappa_l^4}|g_l|^2\right) = \tag{4.8}$$

$$\leq Ct\sum_{l=n+1}^{m} |g_l|^2 \frac{|L(\varkappa_l)|}{\varkappa_l^4} \tag{4.9}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\mathrm{Re}\, L(\varkappa_l) \geq 0$. Так как $|L(\varkappa_l)| \leq \varkappa_l^2$, нам остаётся доказать, что стремится к нулю последовательность

$$\sum_{l=n+1}^{m} \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^2}.$$

Это в свою очередь следует из того, что $D(\sqrt{-\Delta_N}) = W_2^1(D)$, а значит

$$\sqrt{-\Delta_N}G \in L_2(D).$$

Действительно, по формуле Грина

$$g_l = \int_{\partial D} (\gamma_1 G)(\mathbf{z})\overline{s_l(\mathbf{z})}\, dS(\mathbf{z}) = \int_D \nabla G \cdot \nabla \overline{s_l}\, d\mathbf{x} =$$

$$= \left(\sqrt{-\Delta_N} G, \sqrt{-\Delta_N} s_l\right) = \varkappa_l \left(\sqrt{-\Delta_N} G, s_l\right),$$

и значит

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \left|\left(\sqrt{-\Delta_N} G, s_l\right)\right|^2 < \infty.$$

□

Покажем, что оператор Q^t получается как усреднение операторов $\mathcal{Q}^t$ по траекториям $\xi(\cdot)$.

Теорема 4.5. *Для любой функции* $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ *справедливо*

$$\mathbb{E}(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Снова воспользуемся формулой (4.1), в которой следует заменить P^τ на $\mathcal{P}^\tau$

$$\mathbb{E}(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \int_{\partial D} \int_0^t g(\mathbf{z}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^{M} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\mathbf{z})}\, d\mathbf{z}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \int_{\partial D} \int_0^t g(\mathbf{z}) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E} e^{i\varkappa_l \xi_1(\tau)} \frac{L(\varkappa_l)}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\mathbf{z})}\, dS(\mathbf{z})\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial D} \int_0^t \widetilde{R}^t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) g(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})\, d\tau\,.$$

□

4.4 Симметричные устойчивые процессы

В настоящем параграфе мы укажем на то, какие исправления требуется внести в изложенную выше схему, если рассматриваемый процесс Леви не обладает вторым моментом. Мы сделаем это на примере симметричного α-устойчивого процесса $\xi_\alpha(t)$ с $\alpha \in (1, 2)$ и значениями в $\mathbb{R}^d$. Характеристическая функция случайной величины $\xi_\alpha(t)$ равна

$$\varphi_{\alpha,t}(p) = \exp\left(-\frac{t|p|^\alpha}{\alpha}\right).$$

Генератор процесса $\xi_\alpha(t)$ – это оператор $L_\alpha = (-\Delta)^{\alpha/2}$, где $-\Delta$ – оператор Лапласа с ядром $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Этот оператор действует на функцию $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ по правилу

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \Big) \frac{d\mathbf{y}}{y^{1+\alpha}}.$$

Сохраняя данные выше обозначения для двух продолжений $\widetilde{f}_M$ и $\overline{f}_M$ определим полугруппы P_α^t и R_α^t, полагая

$$(P_\alpha^t f)(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\widetilde{f}(\mathbf{x}, \xi_\alpha(t)) \text{ и } (R_\alpha^t f)(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\overline{f}(\mathbf{x}, \xi_\alpha(t)).$$

При этом в качестве области определения оператора R_α^t всё так же можно выбрать $W_2^2(D)$. При таком определении однако нельзя взять в качестве области определения оператора P_α^t весь класс $W_2^2(D)$ так как ввиду отсутствия второго момента

$$\mathbb{E}\chi(\mathbf{x} + \xi_\alpha(t)) = \infty.$$

Определим P_α^t на $D(P_\alpha^t) = \mathcal{N}^0 \oplus G_2^2(D)$.

Генератор полугруппы P_α^t – это оператор $-A_\alpha$, заданный на области определения $D(A_\alpha) = \mathcal{N}^0(D) \oplus G_2^2(D)$, и действующий по правилу

$$(A_\alpha f)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} (L_\alpha \widetilde{f}_M)(\mathbf{x}, 0) \text{ при } \mathbf{x} \in D.$$

Генератор $-A_\alpha^N$ полугруппы R_α^t – это оператор, действующий области определения $D(-A_\alpha^N) = \mathcal{N}(D)$ по формуле

$$(A_\alpha^N f)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} (L_\alpha \overline{f}_M)(\mathbf{x}, 0) \text{ при } \mathbf{x} \in D.$$

Аналогично доказанному в предыдущих параграфах доказывается

Лемма 4.3. *Для $f \in \mathcal{N}^0(D) \oplus G_2^2(D)$ и $\mathbf{x} \in D$ справедливо соотношение*

$$(P_\alpha^t f)(\mathbf{x}) - (R_\alpha^t f)(\mathbf{x}) = -\lim_{M\to\infty} \int_0^t P_\alpha^\tau L\Big(\widetilde{f}_M - \overline{f}_M\Big)(\mathbf{x}, 0)\, d\tau\,.$$

Указанный предел существует также в смысле $W_2^2(D)$.

При этом в следующей лемме есть маленькое, но существенное отличие.

Лемма 4.4. *Для $f \in \mathcal{N}^0(D) \oplus G_2^2(D)$ справедливо соотношение*

$$(P_\alpha^t f)(\mathbf{x}) - (R_\alpha^t f)(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} Q_\alpha^t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (\gamma_1 f)(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z}),$$

где в качестве ядра Q_α^t можно взять

$$Q_\alpha^t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = C + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \widetilde{R}_\alpha^t(\mathbf{x}, \mathbf{z})\, d\tau,$$

с любым вещественным C, а ядро $\widetilde{R}^t_\alpha$ определено формулой

$$\widetilde{R}^t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_l^{2-\alpha}} e^{-t\varkappa_l^\alpha/\alpha} s_m(\mathbf{x})\overline{s_m(\mathbf{z})}.$$

Невозможность выбрать Q^t_α однозначно означает, что средний накопленный импульс определяется лишь с точностью до константы, и корректно определены лишь разности накопленного импульса в разных точках.

Как в случае процесса Леви с конечным вторым моментом, определим операторное семейство $(Q^t_\alpha)_{t\geq 0}$, полагая

$$(Q^t_\alpha g)(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} Q^t_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) g(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})$$

для

$$g \in W_2^{1/2,0}(\partial D) = \left\{ g \in W_2^{1/2,0} \colon \int_{\partial D} g(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z}) = 0 \right\}.$$

Из леммы выше следуют три следующие теоремы.

Теорема 4.6. *Операторные семейства $(R^t_\alpha)_{t\geq 0}$ и $(Q^t_\alpha)_{t\geq 0}$ удовлетворяют эволюционным соотношениям*

$$\begin{aligned} R^{t+s}_\alpha &= R^t_\alpha R^s_\alpha, \\ Q^{t+s}_\alpha &= Q^t_\alpha + \widetilde{R}^t_\alpha Q^s_\alpha. \end{aligned}$$

При этом $R^0_\alpha = I$, $Q^0_\alpha = 0$.

Теорема 4.7. *При всех $t > 0$ и $f \in L_2(D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} R^t_\alpha f = \frac{1}{\alpha} A^N_\alpha R^t_\alpha f.$$

Теорема 4.8. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2,0}(D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t g = \frac{1}{\alpha} \int_{\partial D} \widetilde{R}^t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})\,.$$

Посмотрим наконец как строится оператор случайного накопленного импульса для процесса ξ_α. Определим случайный оператор $\mathcal{P}^\tau_\alpha = \mathcal{P}^\tau_\alpha[\xi_\alpha(\cdot)]$, на области определения $\mathcal{N}^0(D) \oplus B^2_2(D)$, полагая для $f \in \mathcal{N}^0(D)$

$$(\mathcal{P}^\tau_\alpha f)(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\varkappa_m \xi_{\alpha,1}(\tau)} (f, s_m) s_m(\mathbf{x}),$$

и для $f \in G^2_2(D)$

$$(\mathcal{P}^\tau_\alpha f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \xi_\alpha(\tau)).$$

Очевидно, что $P_\alpha^t = \mathbb{E}\mathcal{P}^t$. Определим случайный оператор $\mathcal{Q}_\alpha^t = \mathcal{Q}_\alpha^t[\xi_\alpha(\cdot)]$, по аналогии с формулой (4.5):

$$(\mathcal{Q}_\alpha^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{M\to\infty} \int_0^t \mathcal{P}_\alpha^\tau L\Big(\widetilde{G}_M - \overline{G}_M\Big)(\mathbf{x}, 0)\, d\tau, \tag{4.10}$$

где функция $G = G_h \in W_2^2(D)$ определена формулой (4.3).

Теорема 4.9. *Предел в правой части* (4.10) *существует в смысле* $L_2(\mathcal{H}, \mu)$, *где* $\mathcal{H} = D \times \Omega$ *и* $d\mu = d\mathbf{x} \times d\mathbf{P}$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство теоремы 4.4. При этом вместо неравенства (4.9) получится

$$\int_D \mathbb{E}\left|\int_0^t \sum_{l=n+1}^m \frac{1}{\varkappa_l^{2-\alpha}} e^{i\varkappa_l \xi_\alpha(\tau)} g_l s_l(\mathbf{x})\, d\tau\right|^2 d\mathbf{x} \le C \sum_{l=n+1}^m \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^{4-\alpha}}.$$

Этот ряд сходится, так как при $\alpha \in (1, 2)$ верно неравенство $4 - \alpha > 2$. □

Справедлив также результат, аналогичный теореме 4.5 о том, что оператор Q^t является средним случайных операторов $\mathcal{Q}^t$.

Теорема 4.10. *Для любой функции* $g \in W_2^{1/2,0}(\partial D)$ *справедливо*

$$\mathbb{E}(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Доказательство аналогично.

Заключение

В диссертации рассмотрены вопросы вероятностной аппроксимации решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера и начально-краевых задач для оператора Лапласа и операторов Леви в $\mathbb{R}^d$. Изучение структуры полугрупп, отвечающих отражающимся версиям броуновского движения в d-мерном шаре и симметричным процессам Леви с отражением в гладких ограниченных областях. Основные результаты работы:

1. Построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера в $\mathbb{R}^d$.

2. Построена вероятностная аппроксимация решения начально-краевых задач Дирихле и Неймана для оператора $e^{i\phi}\Delta$, $\phi \in [0, \pi/4]$ в d-мерном шаре.

3. Получен операторный аналог разложения Скорохода для броуновского движения с отражением в d-мерном шаре. Именно, доказано, что разность Q^t полугруппы отражающегося процесса P^t и полугруппы свободного процесса R^t является оператором, переводящим функции, заданные на границе, в функции, заданные в области. Построен случайный оператор $\mathcal{Q}^t$, обобщающий понятие интеграла по локальному времени. Доказано равенство $Q^t = \mathbb{E}\mathcal{Q}^t$.

4. Для последовательности сложных пуассоновских процессов, слабо сходящейся к броуновскому движению, построены отражающиеся версии и доказаны соответствующие предельные теоремы.

5. Получен операторный аналог разложения Скорохода для симметричных процессов Леви, имеющих конечный второй момент, с отражением в гладких ограниченных областях. Именно, доказано, что разность Q^t полугруппы отражающегося процесса P^t и полугруппы свободного процесса R^t является оператором, переводящим функции, заданные на границе, в функции, заданные в области. Построен случайный оператор $\mathcal{Q}^t$, обобщающий понятие интеграла по локальному времени. Доказано равенство $Q^t = \mathbb{E}\mathcal{Q}^t$.

6. Показано что для α-устойчивых процессов оператор Q^t можно определить лишь с точностью до произвольной константы. Построен случайный оператор $\mathcal{Q}^t$ и доказано равенство $Q^t = \mathbb{E}\mathcal{Q}^t$.

Приложение 1. Свойства собственных функций оператора Лапласа–Дирихле и Лапласа–Неймана

В этом приложении мы вводим обозначения, которые потребуются нам в пятой и шестой главах работы. В обеих частях рассматриваются процессы в ограниченных областях $D \subset \mathbb{R}^d$ с поглощением или отражением на границе. Так как и поглощение, и отражение мы будем понимать в терминах граничных условий для генератора, нам потребуются факты о собственных функциях оператора Лапласа–Дирихле и Лапласа–Неймана.

4.5 Основные определения и обозначения

Пусть D – гладкая область в $\mathbb{R}^d$ (мы не делаем специальных оговорок, хотя в большинстве случаев достаточно считать, что граница области C^3-гладкая). Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ обозначим $x = |\mathbf{x}|$ и $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$. Меру Лебега на границе области ∂D будем обозначать через dS.

Запись $A \Subset B$ означает, что множество A компактно принадлежит B.

Сферические гармоники

Как известно, оператор Лапласа может быть записан в виде ([45], формула (2.1))

$$\Delta = \frac{1}{x^{d-1}}\frac{\partial}{\partial x}x^{d-1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\Delta_{S^{d-1}}, \tag{4.11}$$

где $\Delta_{S^{d-1}}$ называется оператором Лапласа–Бельтрами на сфере S^{d-1}. Собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами известны: $\lambda(\lambda+d-2)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, при этом каждое из них является кратным. Число вырождения $d(\lambda)$ в общем случае даётся формулой ([45], формула (2.46)). Фиксируем в каждом из собственных подпространств ортонормированный в $L_2(S^{d-1})$ базис $\{Y_\lambda^\mu\}_\mu$. Вся система собственных функций $\{Y_\lambda^\mu\colon \mu = 1, \ldots, d(\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортогональным базисом в $L_2(S^{d-1})$. Справедливо соотношение ортогональности

$$\int\limits_{S^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})\overline{Y_{\lambda'}^{\mu'}(\hat{\mathbf{x}})}\, d\hat{\mathbf{x}} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}. \tag{4.12}$$

Функции Y_λ^μ называются сферическими гармониками. Любая функция g из $L_2(S^{d-1})$ может быть разложена в ряд

$$g(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d(\lambda)} g_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}). \tag{4.13}$$

В дальшейшей мы будем опускать указание на индексы суммирования в таких суммах, предполагая, что значки λ и μ пробегают все свои возможные значения.

Сферические гармоники, отвечающие собственному значению $\lambda(\lambda+d-2)$, являются сужениями однородных порядка λ гармонических полиномов на сферу S^{d-1}. Следовательно, $x^\lambda Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})$ – это гармонический полином.

4.6 Собственные функции оператора Лапласа с условиями Дирихле или Неймана в d-мерном шаре

Здесь и далее мы обозначаем

$$\alpha = d/2 - 1. \tag{4.14}$$

Собственные функции оператора Лапласа с условиями Дирихле в d-мерном шаре имеют вид

$$j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}), \tag{4.15}$$

где j_λ^d – это d-мерные гиперсферические функции Бесселя, являющиеся решениями радиальной части уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^d$, и связанные с обычными функциями Бесселя J_ν соотношением ([45], формула (4.24))

$$j_\lambda^d(x) = C_\alpha \frac{J_{\lambda+\alpha}(x)}{x^\alpha}, \qquad C_\alpha = \begin{cases} 1 & d \in 2\mathbb{Z}, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & d \notin 2\mathbb{Z}; \end{cases}, \tag{4.16}$$

и $\varkappa_{\lambda k},\ k \geq 0$ – нули $J_{\lambda+\alpha}$. Собственные значения оператора Лапласа с условиями Дирихле, отвечающие этим собственным функциям, есть $\varkappa_{\lambda k}^2$.

Введём дополнительно другую нумерацию для нормированных в пространстве $L_2(D)$ собственных функций, обозначая через s_m m-ую функцию в списке $j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})/n_{\lambda\mu k}$ ($n_{\lambda\mu k}$ – нормировка собственных функций в L_2), упорядоченном по возрастанию собственных чисел $\varkappa_{\lambda k}^2$, а само соответствующее ей собственное число $\varkappa_{\lambda k}^2$ обозначим через $\varkappa_m^2$. Это нужно для того, чтобы воспользоваться асимптотикой Вейля ([46], стр. 205, формула (17.3.6)) для собственных значений оператора Лапласа с условиями Дирихле:

$$\varkappa_m^2 \sim \frac{4\pi^2}{(\omega_d |\Omega|)^2} m^{2/d} \text{ при } m \to \infty, \tag{4.17}$$

где ω_d – это объём единичного шара в $\mathbb{R}^d$.

Лемма 4.5. *Функция f_0 класса $W_2^{2,0}(D)$ может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Дирихле:*

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c_m^0 s_m(\mathbf{x}) = \sum c_{\lambda\mu k}^0 j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}), \tag{4.18}$$

при этом её соболевская норма может быть оценена с двух сторон как

$$\|f_0\|^2_{W_2^2(D)} \asymp \sum |c_m^0|^2 m^{4/d} \tag{4.19}$$

Утверждение леммы следует из второго основного неравенства для эллиптического оператора ([40], гл. III, §8, стр.213).

Собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями Неймана в d-мерном шаре имеют вид

$$j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\mathbf{x}), \tag{4.20}$$

где $\widetilde{\varkappa}_{\lambda k},\ k \geq 0$ – нули производной $J'_{\lambda+\alpha}(x)$.

Аналогично тому, как мы это делали для собственных функций оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле, введём вторую нумерацию для этих собственных функций. А именно, обозначим через $\widetilde{s}_m$ m-ую функцию в списке $j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})/\widetilde{n}_{\lambda\mu k}$ ($\widetilde{n}_{\lambda\mu k}$ – нормировка собственных функций в L_2), упорядоченном по возрастанию собственных чисел $\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}$, а само соответствующее ей собственное число $\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}$ обозначим через $\widetilde{\varkappa}^2_m$. При этом асимптотика Вейля не изменися

$$\widetilde{\varkappa}^2_m \sim C m^{2/d} \text{ при } m \to \infty, \tag{4.21}$$

где

$$C = \frac{4\pi^2}{(\omega_d |\Omega|)^2/d},$$

где ω_d – это объём единичного шара в $\mathbb{R}^d$.

Справедлива аналогичная лемма:

Лемма 4.6. *Пусть функция f_0 класса $W_2^2(D)$ удовлетворяет условию*

$$\gamma_0 \partial_n f_0 = 0.$$

Тогда она может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Неймана:

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c_m^0 \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) = \sum c_{\lambda\mu k}^0 j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}), \tag{4.22}$$

при этом её соболевская норма может быть оценена с двух сторон как

$$\|f_0\|^2_{W_2^2(D)} \asymp |c_0^0|^2 + \sum |c_m^0|^2 m^{4/d} \tag{4.23}$$

Нам потребуются выражения для интегралов вида

$$\int\limits_0^\infty x^{d-1} j_\lambda^d(ux) R(x)\, dx, \tag{4.24}$$

где u – неотрицательный параметр, а в качестве функции R может выступать одна из следующих функций: $x^\lambda 1_{[0,1]}(x)$, $j_\lambda^d(vx)$ или $j_\lambda^d(vx) 1_{[0,1]}(x)$. Можно показать, что для них справедливы соотношения, аналогичные соотношениям теории обычных бесселевых функций. Эти интегралы вычислены в следующих трёх леммах.

Лемма 4.7. *Для любых u, $v > 0$ справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^\infty x^{d-1} j_\lambda^d(ux)\, j_\lambda^d(vx)\ dx = \frac{C_\alpha^2}{u^{d-1}} \delta(u-v), \tag{4.25}$$

где δ – это δ-функция Дирака.

Утверждение леммы следует из определения гиперсферических функций Бесселя (4.16) и известного ([47], стр. 499, формула 3) соотношения для обычных функций Бесселя:

Лемма 4.8. *Справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^1 x^{d-1} j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x)\, j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k'} x)\ dx = \frac{\delta_{kk'}}{2} \Big(j_{\lambda+1}^d(\varkappa_{\lambda k}) \Big)^2 \tag{4.26}$$

Утверждение леммы (4.8) вытекает из определения гиперсферических функций Бесселя (4.16) и известного ([47], стр. 633, формула 4) соотношения для обычных функций Бесселя.

Лемма 4.9. *При $u \geq 0$ справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^1 x^{d-1} j_\lambda^d(ux)\, x^\lambda\ dx = \frac{j_{\lambda+1}^d(u)}{u} \tag{4.27}$$

Утверждение легко выводится из леммы 4.13 книги [48] (стр. 170).

Воспользуемся соотношением ортогональности (4.12) и леммой (4.8), чтобы вычислить норму $j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})$ в $L_2(D)$.

$$n_{\lambda\mu k}^2 = \| j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}) \|_{L_2(D)}^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 x^{d-1} \Big(j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) \Big)^2 dx \int\limits_{S^{d-1}} |Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})|\ d\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \Big(j_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k}) \Big)^2. \tag{4.28}$$

Аналогично можно вычислить норму функции $j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})$. Для этого нам понадобится формула ([47], стр. 634, формула 6)

$$\widetilde{n}^2_{\lambda\mu k} = \|j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\|^2_{L_2(D)} =$$

$$= \int\limits_0^1 x^{d-1}\Big(j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)\Big)^2\,dx = \frac{C^2_\alpha}{\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}}\int\limits_0^1 x\Big(J_{\lambda+\alpha}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}x)\Big)^2\,dx =$$

$$= \frac{C^2_\alpha}{\widetilde{\varkappa}^{2\alpha}_{\lambda k}}\frac{(\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}-(\lambda+\alpha)^2)}{2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}}J^2_{\lambda+\alpha}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}) \quad (4.29)$$

Окончательно,

$$\widetilde{n}^2_{\lambda\mu k} = \frac{\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}-(\lambda+\alpha)^2}{2\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}}\Big(j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})\Big)^2 \quad (4.30)$$

Следующая лемма помогает при вычислении преобразований Фурье функций, данных в виде разложения по решениям уравнения Гельмгольца в шаре.

Лемма 4.10. *Пусть функция имеет вид произведения $f(\mathbf{x}) = R(x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})$. Тогда её преобразование Фурье – это функция $\widehat{f}(\mathbf{p}) = S(p)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{p}})$, где*

$$S(p) = (-i)^\lambda(d-2)!!\omega_{d-1}\int\limits_0^\infty x^{d-1}\,j^d_\lambda(px)\,R(x)\,dx. \quad (4.31)$$

Доказательство использует известную формулу Релея для разложения плоской волны ([45], (4.25))

$$e^{i\mathbf{px}} = (d-2)!!\omega_{d-1}\sum i^\lambda j^d_\lambda(px)\,Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\,\overline{Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{p}})}. \quad (4.32)$$

Пользуясь этой леммой и леммой 4.7, получим, что преобразование Фурье функции $j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}})$ равно

$$(-i)^\lambda(d-2)!!\,\omega_{d-1}\frac{C^2_\alpha}{\varkappa^{d-1}_{\lambda k}}\;\delta(p-\varkappa_{\lambda k})\;Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{p}}), \quad (4.33)$$

то есть представляет собой заряд, сосредоточенный на сфере радиуса $\varkappa_{\lambda k}$. Следовательно, справедливо представление

$$j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k}x)Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) = (-i)^\lambda\frac{(d-2)!!\omega_{d-1}C^2_\alpha}{(2\pi)^d\varkappa^{d-1}_{\lambda k}}\int\limits_{S^{d-1}_{\varkappa_{\lambda k}}} Y^\mu_\lambda(\hat{\mathbf{p}})e^{-i\mathbf{px}}\,d\hat{\mathbf{p}}. \quad (4.34)$$

Делая замену переменных в интеграле, получаем следующее утверждение:

Лемма 4.11. *Функция $j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k}x)Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}})$ является аналитической функцией d переменных и представляется в виде преобразования Фурье некоторого заряда на сфере. Именно, справедлива формула*

$$j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k}x)Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{x}}) = (-i)^\lambda \frac{(d-2)!!\omega_{d-1}C_\alpha^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{p}})e^{-i\varkappa_{\lambda k}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}}\, d\hat{\mathbf{p}}. \tag{4.35}$$

Для нас важно, что функция $u(\mathbf{x}) = j_\lambda^d(\varkappa x)Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$ принадлежит области определения $u \in D(L)$ (формула (0.4)), и является собственной функцией оператора L

$$-Lu = L(\varkappa)u. \tag{4.36}$$

4.7 Собственные функции оператора Лапласа в ограниченной гладкой области с условиями Неймана на границе

В этом параграфе мы переходим от шара к произвольной гладкой ограниченной области D.

Для упорядоченной по возрастанию последовательности собственных чисел $\varkappa_m^2$ оператора Лапласа–Неймана в области D справедлива асимптотика Вейля (см. [46], стр. 205, формула (17.3.6))

$$\varkappa_m^2 \sim \frac{4\pi^2}{(\omega_d|\Omega|)^2}m^{2/d} \text{ при } m \to \infty,$$

где ω_d – это объём единичного шара в $\mathbb{R}^d$.

Нормированную в $L_2(D)$ собственную функцию, отвечающую собственному числу $\varkappa_m^2$ будем обозначать через s_m.

Обозначим через $\mathcal{N}(D)$ область определения оператора Лапласа с условиями Неймана в $W_2^2(D)$

$$\mathcal{N}(D) = \left\{u \in W_2^2(D) \colon \gamma_1 u = 0\right\}$$

где $\gamma_1 \colon W_2^2(D) \to W_2^{1/2}(\partial D)$ – это замкнутый с класса $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ оператор взятия внешней нормальной производной на ∂D.

Известно, что для любой функции $f \in W_2^1(D)$ ряд

$$f = \sum_{m=0}^{\infty}(f, s_m)_{L_2(D)}s_m \tag{4.37}$$

сходится к f по норме $W_2^1(D)$. Если к тому же $f \in \mathcal{N}(D)$, то указанный ряд сходится к f по норме $W_2^2(D)$. Заметим, что принадлежности f классу $W_2^2(D)$ для такой сходимости недостаточно.

Через $h(\mathbf{x},\mathbf{z})$ обозначим функцию Грина оператора Лапласа с условиями Неймана на ∂D, то есть решение уравнения

$$-\Delta_{\mathbf{z}} h(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{x}} - |D|^{-1},$$

выделенное условием нормировки

$$\int_D h(\mathbf{x},\mathbf{z})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Если функция g удовлетворяет условию разрешимости задачи Неймана (имеет нулевой интеграл по границе), то

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} h(\mathbf{x},\mathbf{z})\; g(\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})$$

удовлетворяет задаче Неймана $-\Delta f = 0$ в D и $\gamma_1 f = g$ на границе.

Приложение 2. Специальное разложение $W_2^2(D)$ в ортогональную сумму пространств

Определим квадратичную форму a равенством

$$a(u,v) = \int_D \Delta u \cdot \overline{\Delta v}\, d\mathbf{x}, \quad D(a) = W_2^2(D).$$

Нетрудно видеть, что $a(u,u) = 0$ тогда и только тогда, $u \in G_2^2(D) = \{u \in W_2^2(D)\colon u \text{ гармоническая}\}$. Иначе говоря, a – настоящая норма в W_2^2/G_2^2. Ввиду того факта, что задача Неймана для оператора Лапласа однозначно разрешима с точностью до константы, форма a оказывается невырожденной в классе

$$\mathcal{N}^0 = \left\{ u \in \mathcal{N}\colon \int_D u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Вычислим ортогональное по форме a дополнение к пространству $\mathcal{N}^0$. Если u a-ортогонально $\mathcal{N}^0$, то есть выполнено

$$\int_D \Delta u \cdot \overline{\Delta v}\, d\mathbf{x} = 0 \text{ для всех } v \in \mathcal{N},$$

то это равенство в частности выполнено для всех $v \in C_c^\infty(D) \subset \mathcal{N}^0$, и значит

$$0 = \int_D \Delta u \cdot \overline{\Delta v}\, d\mathbf{x} = \int_D u \cdot \overline{\Delta^2 v}\, d\mathbf{x}\,.$$

Это означает, что $\Delta^2 u = 0$ в смысле обобщённых функций. Согласно лемме Вейля, $u \in C^4(D)$ и равенство $\Delta^2 u(\mathbf{x}) = 0$ выполнено поточечно в D.

Теперь для всех $v \in \mathcal{N}^0(D)$ выполнено

$$0 = \int_D \Delta u \cdot \overline{\Delta v}\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int_D \Delta^2 u \cdot \overline{v}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \left(\overline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Delta u - \Delta u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS(\mathbf{x}) =$$

$$= - \int_{\partial D} \overline{v} \frac{\partial}{\partial n} \Delta u\, dS(\mathbf{x})\,.$$

Так как это равенство выполнено для всех $v \in \mathcal{N}^0(D)$, справедливо равенство

$$\gamma_1 \Delta u = 0.$$

Так как замкнутость $\mathcal{N}^0(D)$ очевидна, доказана

Лемма 4.12. *Имеет место ортогональное относительно формы a разложение*

$$W_2^2(D) = \mathcal{N}^0(D) \oplus BG_2^{2,0}(D),$$

где

$$BG_2^{2,0}(D) = \left\{u \in W_2^2(D)\colon \Delta^2 u = 0,\ \gamma_1 \Delta u = 0\right\}.$$

При этом форма a невырождена на $\mathcal{N}^0(D)$.

Построим теперь разложение для класса $BG_2^{2,0}(D)$. Нетрудно убедиться, что общее сферически-симметричное решение уравнения $\Delta^2 f = 0$ имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{A}{x^{d-4}} + \frac{B}{x^{2-d}} + Cx^2 + D.$$

При этом первое и второе слагаемое не лежат в $W_2^2(D)$ (кроме того, первое слагаемое не может удовлетворять условию $\gamma_1 \Delta f = 0$). Третье и четвёртое слагаемое лежат в $W_2^2(D)$ и удовлетворяют условию $\gamma_1 \Delta f = 0$. Это наводит нас на мысль, что из них можно “собрать” пространство $BG_2^{2,0}(D)$.

Четвёртое слагаемое $f(\mathbf{x}) = D$ обнуляет форму a и лежит в пространстве $G_2^2(D)$, и, следовательно, не представляет для нас интереса.

Рассмотрим решения уравнения $\Delta^2 f = 0$, имеющие вид $f = x^2 Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$. Тогда

$$\Delta f = 2dY_\lambda^\mu - \lambda\big(\lambda + d - 2\big)Y_\lambda^\mu,$$

и значит

$$\lambda\big(\lambda + d - 2\big)\Big(2d - \lambda\big(\lambda + d - 2\big)\Big)Y_\lambda^\mu = 0.$$

Это возможно если $\lambda = 2$ или $\lambda = 0$. При $\lambda = 2$ функция $x^\lambda Y_\lambda^\mu$ лежит в классе $G_2^2(D)$ и тоже обнуляет форму a. Так как сферические гармоники образуют базис в $L_2(S^{d-1})$, мы доказали, что подпространство в $BG_2^{2,0}(D)$, на котором отлична от нуля форма a, одномерно. Зафиксируем в нём a-нормированный вектор χ

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{x^2}{\sqrt{2d|D|}}$$

и определим проекцию (по форме a) на одномерное подпространство в $BG_2^{2,0}(D)$, натянутое на χ, полагая для $f \in W_2^2(D)$

$$f_b(\mathbf{x}) = a(f, \chi)\ \chi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \int_D \Delta f \cdot \overline{\Delta \chi}\, d\mathbf{y}\,.$$

Нетрудно заметить, что справедливо равенство

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f_b}{\partial n}\, dS(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, dS(\mathbf{x}),$$

тем самым функция $g = \gamma_1(f - f_b)$ удовлетворяет условию разрешимости задачи Неймана $\gamma_1 u = g$ для оператора Лапласа в D. Её решение, как известно, определено с точностью до константы. Обозначим через f_h такой выбор константы в решении, что $f_h - f_b \in \mathcal{N}^0(D)$.

Мы доказали, что имеет место ортогональное относительно формы a разложение

$$BG_2^{2,0}(D) = \chi\mathbb{C} \oplus G_2^2(D),$$

где $\chi\mathbb{C} = \{z\chi\colon z \in \mathbb{C}\}$.

Объединяя это равенство с доказанным ранее разложением для $W_2^2(D)$, мы получаем следующую лемму.

Лемма 4.13. *Имеет место ортогональное относительно формы a разложение*

$$W_2^2(D) = \mathcal{N}^0(D) \oplus \chi\mathbb{C} \oplus G_2^2(D).$$

При этом форма a невырождена в $\mathcal{N}^0(D)$ *и* $\chi\mathbb{C}$*, и тождественно равна нулю в пространстве* $G_2^2(D)$.

Заметим, что полученное разложение является прямым аналогом разложения пространства $W_2^1(D)$ (формула (0.5))

$$W_2^1(D) = W_2^{1,0}(D) \oplus G_2^1(D).$$

Кроме того, оно может быть обобщено на случай произвольного пространства Соболева $W_2^k(D)$, при этом на месте пространства $\mathcal{N}$ получаются классы с условиями

$$\gamma_1 u = \gamma_1 \Delta u = \cdots = \gamma_1 \Delta^l u = 0,$$

обеспечивающими хорошую сходимость рядов Фурье по собственным функциям s_m. Вместо χ при этом возникают полиномы чётных степеней от x.

Литература

[1] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\partial u/\partial t = \sigma^2 u$ с комплексным параметром σ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.

[2] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Докл. акад. наук **459**, № 4 (2014), 400–402.

[3] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.

[4] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы, II.* — Теор. вер. и её примен. **62**, № 3 (2017), 446–467.

[5] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Отражающиеся процессы Леви и порождаемые ими семейства линейных операторов.* — Теор. вер. и её примен. **64**, № 3 (2019), 417–441.

[6] М. В. Платонова, *Невероятностные безгранично делимые распределения: представление Леви-Хинчина, предельные теоремы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 145–177.

[7] М. В. Платонова, *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **442** (2015), 101–117.

[8] М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 92–106.

[9] М. В. Платонова, *Вероятностные представления решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана-Лиувилля.* — Теор. вер. и её примен. **61**, № 3 (2016), 417–438.

[10] K. Bogdan, K. Burdzy, Z.-Q. Chen, *Censored stable processes.* — Probab. Theory Relat. Fields **127**, no. 1 (2003), 89–152.

[11] Y. Kabanov, M. Safarian, *Markets with Transaction Costs: Mathematical Theory.* — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010, ISBN: 978-3-540-68120-5 978-3-540-68121-2.

[12] R. Bekker, B. Zwart, *On an equivalence between loss rates and cycle maxima in queues and dams.* — Probab. Eng. Informational Sci. **19**, no. 2 (2005), 241–255.

[13] J. W. Cohen, A. Browne, *The single server queue: Vol. 8.* — North-Holland Amsterdam, 1982.

[14] W. L. Cooper, V. Schmidt, R. F. Serfozo, *Skorohod–Loynes characterizations of queueing, fluid, and inventory processes.* — Queueing Syst. **37**, no. 1-3 (2001), 233–257.

[15] D. J. Daley, *Single-server queueing systems with uniformly limited queueing time.* — J. Aust. Math. Soc. **4**, no. 4 (1964), 489–505.

[16] S. Asmussen, *Applied probability and queues: Vol. 51.* — Springer Science & Business Media, 2008.

[17] W. Stadje, *A new look at the Moran dam.* — J. Appl. Probab. **30**, no. 2 (1993), 489–495.

[18] K.-i. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* — Cambridge Studies in Advanced Mathematics no. 68, Cambridge : Cambridge University Press, 1999, ISBN: 978-0-521-55302-5.

[19] R. F. Bass, P. Hsu, *Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains.* — Ann. Probab. **19**, no. 2 (1991), 486–508.

[20] M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes.* — North-Holland Publishing Company, 1980.

[21] G. A. Brosamler, *A probabilistic solution of the Neumann problem.* — Math. Scand. **38** (1976), 137–147.

[22] T. Björk, *The Pedestrian's Guide to Local Time.* — ArXiv151208912 Math (2015).

[23] A. Pilipenko, *An introduction to stochastic differential equations with reflection: Vol. 1.* — Universitätsverlag Potsdam, 2014.

[24] А. В. Скороход, *Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами.* — Теор. вер. и её примен. **6**, № 3 (1961), 287–298.

[25] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* — М. : Наука, 1968.

[26] K. L. Chung, R. J. Williams, *Introduction to stochastic integration: Vol. 2.* — Springer, 1990.

[27] M. L. Silverstein, *The reflected Dirichlet space.* — J. Math. **18**, no. 2 (1974), 310–355.

[28] Z.-Q. Chen, *On reflected Dirichlet spaces.* — Probab. Theory Relat. Fields **94** (1992), 135–162.

[29] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

[30] S. Dipierro, X. Ros-Oton, E. Valdinoci, *Nonlocal problems with Neumann boundary conditions.* — ArXiv14073313 Math (2014).

[31] E. Montefusco, B. Pellacci, G. Verzini, *Fractional diffusion with Neumann boundary conditions: The logistic equation.* — Disc. Cont. Dyn. Syst. Ser. B **18** (2013), 2175–2202.

[32] G. Barles, E. Chasseigne, C. Georgelin, E. Jakobsen, *On Neumann type problems for nonlocal equations in a half space.* — Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 4873–4917.

[33] G. Barles, E. Chasseigne, C. Georgelin, E. Jakobsen, *On Neumann and oblique derivatives boundary conditions for nonlocal elliptic equations.* — J. Differential Equations **57** (2014), 213–246.

[34] П. Н. Иевлев, *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 145–158.

[35] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Обобщённые функции: Т. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства.* — М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.

[36] Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы* / Под ред. А. М. Вершика. — М. : МЦНМО, 2007.

[37] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики: Т. 2.* — Мир, 1978.

[38] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* — М. : Мир, 1972.

[39] П. Н. Иевлев, *Вероятностные представления для решений начально-краевых задач для уравнения Шрёдингера в d-мерном шаре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 149–170.

[40] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* — М. : Наука, 1973.

[41] П. Н. Иевлев, *Броуновское движение с отражением в d-мерном шаре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 158–177.

[42] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations: Vol. 44.* — Springer Science & Business Media, 2012.

[43] M. Reed, B. Simon, *IV: Analysis of operators: Vol. 4.* — Elsevier, 1978.

[44] P. Ievlev, *Symmetric Levy processes with reflection.* — Glob. Stoch. Anal. **8**, no. 1 (2021).

[45] J. E. Avery, J. S. Avery, *Hyperspherical harmonics and their physical applications.* — World Scientific, 2017.

[46] Э. Ч. Титчмарш, В. Б. Лидский, *Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* — М. : Изд-во иностр. лит., 1961.

[47] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions.* — Cambridge university press, 1995.

[48] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* — Princeton Mathematical Series no. 32, Princeton, N.J : Princeton University Press, 1975, ISBN: 978-0-691-08078-9.