Feuille de théorie 1

Définition 1. *Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ici m est le nombre de lignes et n est le nombre de colonnes. La taille de la matrice est un couple de nombres, noté $m \times n$. L'ensemble des matrices $m \times n$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ou simplement $M_{m,n}$.

- *Une matrice est dite <u>un vecteur colonne</u> si le nombre de colonnes est égal à un : $n = 1$.*
- *Une matrice est dite <u>un vecteur ligne</u> si le nombre de lignes est égal à un : $m = 1$.*
- *Une matrice est dite <u>carrée</u> si $m = n$. Toute matrice non carrée est dite <u>rectangulaire</u>.*
- *Une matrice est dite <u>symétrique</u> si $(A)_{ij} = (A)_{ji}$.*
- *Une matrice est dite <u>diagonale</u> si $(A)_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.*
- *La matrice nulle est notée 0 ou $0_{m\times n}$ si l'on veut préciser sa taille. Tous ses éléments sont nuls.*
- *La matrice identité est notée I ou I_n, elle est définie par $(I)_{ij} = 1$ si $i = j$ et $(I)_{ij} = 0$ sinon. Notez que I est une matrice carrée.*

Définition 2. *L'addition des matrices et la multiplication par un scalaire sont définies composante par composante :*

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij}.$$

Notez que la somme de deux matrices <u>de tailles différentes</u> n'est pas définie.

Définition 3. *Le produit de deux matrices $A \in M_{m,p}$ et $B \in M_{p,n}$ est une nouvelle matrice $AB \in M_{m,n}$ dont les éléments sont définis par*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{ik}(B)_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Notez que

- Le produit AB n'est défini que si $A \in M_{m,p}$ et $B \in M_{p,n}$. Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, le produit n'est pas défini.
- Le produit AB <u>n'est pas</u> défini composante par composante : $(AB)_{ij} \neq (A)_{ij}(B)_{ij}$.

- $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Les exemples les plus simples sont

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

- On dit qu'il existe des diviseurs de zéro dans $M_{m,n}$: des paires de matrices non nulles dont le produit est nul.

- Le produit matriciel est non commutatif : $AB \neq BA$.

- En raison de la non-commutativité, de nombreuses identités telles que $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ ne sont pas valides dans l'espace des matrices :

$$(A - B)(A + B) = A^2 - AB + BA - B^2.$$

  La partie en bleu n'est en général pas nulle. De même, l'identité $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ n'est pas valide :

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

  La partie en bleu n'est en général pas égale à $2AB$.

Définition 4. *L'espace des colonnes d'une matrice A est l'ensemble*

$$L_c := \left\{ \boldsymbol{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notez que L_c est un espace vectoriel : si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_c$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in L_c$ et $\lambda\boldsymbol{x} \in L_c$.

Définition 5. *L'espace des lignes d'une matrice A est l'ensemble*

$$L_r := \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{x} = \beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \\ + \dots + \beta_m \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\}.$$

Notez que L_r est aussi un espace vectoriel : si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_r$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in L_r$ et $\lambda\boldsymbol{x} \in L_r$.

Définition 6. *Deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont dits linéairement indépendants si $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ implique $\alpha = \beta = 0$. Une collection de vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ est linéairement indépendante si $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ implique que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.*

- Exemple : les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

- Plus généralement, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ a_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ * \\ a_{33} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ a_{44} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

  sont linéairement indépendants si $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots, a_{mn} \neq 0$.

- Contre-exemple : les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants.

Définition 7. *La dimension d'un espace vectoriel L est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans cet espace. Elle est notée $\dim L$.*

- Le seul espace avec $\dim L = 0$ est $L = \{\mathbf{0}\}$.
- Si L est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors $\dim L \leq n$. Par exemple, tout sous-espace d'un plan a une dimension inférieure ou égale à 2.

Le théorème important suivant est donné sans preuve :

Théorème 1. *Les dimensions de l'espace des colonnes et de l'espace des lignes d'une matrice sont égales.*

Ce théorème justifie la définition suivante :

Définition 8. *Le rang d'une matrice est la dimension de son espace des colonnes ou la dimension de son espace des lignes :*

$$\operatorname{Rank} A = \dim L_r = \dim L_c.$$

- Puisque $\dim L_r \leq n$ et $\dim L_c \leq m$, on a donc $\operatorname{Rank} A \leq \min\{m, n\}$. Ceci est important pour effectuer des vérifications de cohérence : si vous avez trouvé que le rang d'une matrice 2×3 est égal à 3, il y a une erreur dans votre raisonnement, car il ne devrait pas excéder 2 !
- Il découle de la remarque dans la définition de l'indépendance linéaire que si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots \\ 0 & a_{22} & * & * & \cdots & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & * & \cdots & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{pn} & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

  avec certains $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pn} \neq 0$, alors $\operatorname{Rank} A = p$ car les p premières colonnes sont linéairement indépendantes. Cette affirmation est un outil important pour déterminer $\operatorname{Rank} A$, comme nous allons le voir maintenant.

Définition 9. *Les transformations élémentaires sur les lignes sont les trois opérations suivantes définies sur une matrice :*

- *Ajouter une ligne à une autre. Par exemple,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \ldots & a_{1n} + a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

  Nous notons ces transformations par $L_j \leftarrow L_j + L_i$, ce qui se lit "remplacer la $j^{\text{ème}}$ ligne par la somme de la $j^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ ligne".

- *Multiplier une ligne par une constante non nulle λ. Par exemple,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

  Cette transformation est généralement notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

- *Permuter deux lignes. Par exemple,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

  Cette transformation est généralement notée $L_i \leftrightarrow L_j$.

Définition 10. *Les opérations élémentaires sur les colonnes sont définies de manière similaire.*

Les transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes sont importantes en raison du théorème suivant, qui est facile à démontrer (essayez !) :

Théorème 2. *Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas l'espace des lignes d'une matrice. Les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'espace des colonnes d'une matrice.*

Le corollaire suivant découle immédiatement du dernier théorème :

Corollaire 1. *Les transformations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice.*

Cela nous permet de calculer le rang d'une matrice en jouant au jeu suivant jeu :

Transformer une matrice donnée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dans une forme pour laquelle il est facile de déterminer le rang :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots \\ 0 & a_{22} & * & * & \cdots & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & * & \cdots & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{pn} & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rank } A' = p$$

en appliquant des transformations élémentaires. D'après le corollaire ci-dessus,

$$\operatorname{Rank} A = \operatorname{Rank} A' = p.$$

Remarque 1. *Mélanger les transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes est acceptable tant que l'on calcule le rang. Cependant, nous utiliserons les transformations élémentaires pour plusieurs autres applications. Dans ces autres cas, il ne faut pas mélanger ces transformations et il faut se limiter à un seul type de transformations. Pour éviter toute confusion, à partir de maintenant, nous n'utiliserons que des opérations sur les lignes.*

Si nous décidons d'éviter les opérations sur les colonnes, il se peut qu'il ne soit pas possible de transformer une matrice en une forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots \\ 0 & a_{22} & * & * & \cdots & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & * & \cdots & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \color{red}{a_{pn}} & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour transformer la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en cette forme, il faudrait permuter des colonnes. Heureusement, il est facile de déterminer le rang de telles matrices sans permuter les colonnes : il suffit de noter que les colonnes mises en évidence

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Puisque le rang est le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes, nous voyons que le rang de cette matrice est 2 *. En d'autres termes, pour déterminer le rang, il est suffisant de transformer la matrice en une forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{22} & * & \cdots & * & * & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{33} & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

et de simplement compter le nombre de colonnes linéairement indépendantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{22} & * & \cdots & * & * & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{33} & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$