Mathématiques II
HEC Lausanne, Spring 2025

Feuille de théorie 2

Definition 1. *Une permutation π de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ est toute fonction bijective*

$$\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}.$$

- Définir une permutation, c'est définir ses valeurs sur chaque élément de $\{1,\dots,n\}$. Par exemple, $\pi(1)=2$ et $\pi(2)=1$ définit une permutation de $\{1,2\}$.
- La permutation identité est définie par $\pi(i)=i$ pour tout i.
- On dit qu'il y a une inversion de π si $i<j$, mais $\pi(i)>\pi(j)$ (donc π inverse l'ordre de i et j).
- Une permutation est dite paire/impaire si son nombre d'inversions est pair/impair.
- Le signe d'une permutation est défini par $\operatorname{sign}(\pi)=+1$ si π est paire et $\operatorname{sign}(\pi)=-1$ si π est impaire.

Definition 2. *Le déterminant d'une matrice carrée $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est le nombre suivant :*

$$\det A = \sum_{\pi:\ \text{permutation de } \{1,\dots,n\}} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Notation alternative pour le déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Si $n=1$, alors $A=(a_{11})$ et $\det A = a_{11}$.
- Si $n=2$, alors
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- Si $n=3$, alors
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
- Il y a $n! = 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ permutations de n éléments. Si $n=3$, le nombre est 6, si $n=4$, le nombre est 24. Par conséquent, trouver le déterminant par définition est très inefficace. Il existe de meilleures approches.

- Voici deux mnémoniques pour mémoriser les formules pour $n = 2$ et $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = {\color{red}+}a_{11}a_{22} {\color{blue}-} a_{12}a_{21}$$

 et

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = {\color{red}+}a_{11}a_{22}a_{33}{\color{red}+}a_{12}a_{23}a_{31}{\color{red}+}a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$\qquad {\color{blue}-}a_{13}a_{21}a_{32}{\color{blue}-}a_{11}a_{32}a_{23}{\color{blue}-}a_{31}a_{22}a_{13}.$$

 Ceci est connu sous le nom de règle de Sarrus.

- Pour les matrices plus grandes, la meilleure approche est d'utiliser les transformations élémentaires ! Voir ci-dessous.

- Si la matrice contient une ligne/colonne nulle, alors $\det A = 0$. Par exemple,

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 0.$$

- Si A est diagonale, alors $\det A =$ produit des entrées diagonales. Par exemple,

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155.$$

 De plus, si A est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure, la même chose est vraie :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155.$$

- Nous avons déjà vu que les transformations élémentaires ne changent pas le rang. Elles changent le déterminant, mais d'une manière contrôlée :

 – Échanger deux lignes change le signe du déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} {\color{blue}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}a_{1n}} \\ {\color{magenta}a_{21}} & {\color{magenta}a_{22}} & {\color{magenta}\cdots} & {\color{magenta}a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = {\color{red}-}\det \begin{pmatrix} {\color{magenta}a_{21}} & {\color{magenta}a_{22}} & {\color{magenta}\cdots} & {\color{magenta}a_{2n}} \\ {\color{blue}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

 .

 – Multiplier une ligne par $\lambda \neq 0$ multiplie le déterminant par λ :

$$\det \begin{pmatrix} {\color{red}\lambda}a_{11} & {\color{red}\lambda}a_{12} & \cdots & {\color{red}\lambda}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = {\color{red}\lambda}\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

– Ajouter un multiple d'une ligne à l'autre <u>ne change pas</u> $\det A$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \cdots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

.

- <u>Idée :</u> appliquer des transformations élémentaires à une matrice pour la mettre sous forme triangulaire supérieure et <u>suivre comment le déterminant change en cours de route</u> :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{quelques transformations} \\ \text{élémentaires}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \tilde a_{11} & \tilde a_{12} & \tilde a_{13} & \cdots & \tilde a_{1n} \\ 0 & \tilde a_{22} & \tilde a_{23} & \cdots & \tilde a_{2n} \\ 0 & 0 & \tilde a_{33} & \cdots & \tilde a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

  et utiliser que le dernier déterminant est égal à $\prod_i \tilde a_{ii}$.

- Énumérons les propriétés importantes du déterminant :

  (i) $\det A^\top = \det A$

  (ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

  (iii) $\boxed{\det(A+B) \neq \det A + \det B}$, par exemple

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  (iv) $\boxed{\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)}$

  (v) $\operatorname{Rank} A = n \iff \det A \neq 0$

- Il existe <u>une autre</u> (la troisième jusqu'à présent !) façon de calculer $\det A$, elle s'appelle le développement <u>cofacteur</u> ou <u>Laplace</u>.

Definition 3. *Un <u>mineur</u> M_{ij} correspondant aux éléments a_{ij} d'une matrice <u>carrée</u> A est le <u>déterminant</u> d'une <u>sous-matrice</u> obtenue en <u>supprimant</u> de A <u>à la fois</u> la i^{th} colonne et la j^{th} ligne :*

$$M_{ij} = \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} \leftarrow i. \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

Le <u>cofacteur</u> de l'élément a_{ij} est défini par

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Notez que le facteur $(-1)^{i+j}$ peut être trouvé comme suit :

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Theorem 1 (Développement de Laplace par colonne)**.** *Pour tout choix de colonne* j *, nous avons*

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}.$$

Theorem 2 (Développement de Laplace par ligne)**.** *Pour tout choix de ligne* i *, nous avons*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}.$$