Mathématiques II
HEC Lausanne, Spring 2025

Fiche de théorie 3

Motivation pour l'inversion matricielle

Quand on résout l'équation linéaire $ax = y$ pour x, on divise simplement par a et on obtient $x = y/a$. Il s'avère qu'un problème beaucoup plus compliqué de trouver des solutions à des <u>systèmes carrés</u> d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

peut être effectuée d'une <u>manière très similaire</u>. Ce système d'équations peut être réécrit sous <u>forme matricielle</u> comme

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Il s'avère que l'Equation (1) peut être résolue pour $\vec{x}$ par

$$\vec{x} = {\color{blue}A^{-1}}\vec{b}$$

avec <u>une nouvelle matrice</u> A^{-1} appelée <u>l'inverse de</u> A. Ci-dessous nous discutons comment définir et comment trouver cette matrice.

Définition et propriétés de l'inverse matricielle

Definition 1. *Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice <u>carrée</u> et qu'il existe une autre matrice <u>carrée</u> $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que*

$$AB = BA = I,$$

alors on dit que A est <u>inversible</u> et que B est <u>l'inverse</u> de A. On note ceci par

$$B = A^{-1}.$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors on peut vérifier que $AB = BA = I$:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-5)\cdot 1 & 2\cdot 5 + (-5)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 3 + 3\cdot 1 & (-1)\cdot 5 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voici quelques remarques.

- L'inverse d'une matrice <u>n'est pas</u> définie composante par composante : $(A^{-1})_{ij} \neq 1/(A)_{ij}$.
- Si A contient une colonne nulle ou une ligne nulle, elle <u>n'est pas</u> inversible, car

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & * \end{pmatrix},$$

donc la matrice à droite <u>ne peut pas</u> être I car elle a une colonne ou une ligne nulle.

- I est clairement l'inverse d'elle-même : $I = I^{-1}$, mais I n'est pas la seule matrice avec cette propriété :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- <u>Toutes les matrices ne sont pas inversibles !</u> En fait, le théorème suivant est vrai (sans preuve) :

Theorem 1. *Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors*

$$A \textit{ est inversible} \iff \operatorname{Rank} A = n \iff \boxed{\det A \neq 0}.$$

Nous ne prouverons que la direction " $\implies$ " :

Proof. Si A est inversible, alors il existe A^{-1} tel que $I = AA^{-1}$. En prenant $\det$ des deux côtés, nous obtenons $\det I = \det(AA^{-1})$. Puisque $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$, à droite nous avons $\det(A)\cdot\det(A^{-1})$, tandis qu'à gauche $\det I = 1$. Donc,

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = 1,$$

et donc $\det A \neq 0$. $\square$

Propriétés de l'inverse matricielle

Voici une liste des propriétés de l'inverse matricielle :

1. Si $AB = I$, alors $BA = I$ automatiquement, donc A et B sont inversibles. *En d'autres termes, nous n'avons pas besoin de vérifier deux égalités $AB = I$ et $BA = I$, il suffit d'en vérifier une.*

   Proof. • $AB = I \implies \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det I = 1$
   - $\implies \det A, \det B \neq 0$
   - Par le théorème ci-dessus B est inversible
   - En multipliant $AB = I$ par B à droite, nous obtenons $(AB)B^{-1} = IB^{-1}$ ou $A = B^{-1}$.
   - En multipliant ceci par B à gauche, nous obtenons $BA = BB^{-1} = I$. □

2. Notez qu'il existe des matrices non carrées $A \in M_{n,p}$ et $B \in M_{p,n}$ telles que $AB = I$. Cela ne signifie pas que A ou B sont inversibles. Seules les matrices carrées peuvent être inversibles.

3. Si A est inversible, l'inverse est unique. En d'autres termes, les égalités $AB = I$ et $AC = I$ ne peuvent pas être satisfaites avec $B \neq C$.

   Proof. Soient B, C deux inverses de A . En multipliant l'égalité $AB = I$ par C à gauche, nous obtenons $C(AB) = C$ ou $(CA)B = C$ ou $B = C$. □

4. $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$.

5. $(A^{-1})^{-1} = A$.

   Proof. (a) En multipliant $I = AA^{-1}$ par $(A^{-1})^{-1}$ à droite, nous obtenons

   $$I(A^{-1})^{-1} = A{\color{blue}A^{-1}(A^{-1})^{-1}}$$

   (b) À gauche, nous avons $(A^{-1})^{-1}$.

   (c) L'expression en bleu est égale à I par définition de $(A^{-1})^{-1}$. □

6. $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. Nous disons que l'inversion commute avec la transposition.

   Proof. En prenant la transposée de $I = AA^{-1}$ nous obtenons

   $$I^\top = (AA^{-1})^\top.$$

   Puisque $I^\top = I$ et $(AA^{-1})^\top = (A^{-1})^\top A^\top$ (rappelons que la transposition inverse l'ordre du produit matriciel), nous obtenons

   $$I = (A^{-1})^\top A^\top.$$

   Par conséquent, $(A^{-1})^\top$ est l'inverse de $A^\top$. □

7. Par le point précédent, si A est symétrique, alors A^{-1} est symétrique.

8. $\boxed{(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}}$. Prenons $A = B = I$ par exemple.

9. Si A et B sont inversibles, alors AB est aussi inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$. *Notez que l'inversion de matrice inverse également l'ordre !*

Proof.
- L'inversibilité découle de $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. En effet, si $\det A, \det B \neq 0$, alors $\det(AB) \neq 0$ et par le théorème ci-dessus AB est inversible.
- Par conséquent, $I = (AB)(AB)^{-1}$.
- En multipliant la dernière égalité par A^{-1} à gauche, nous obtenons $A^{-1} = B(AB)^{-1}$.
- En multipliant ceci par B^{-1} à gauche, nous obtenons $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, ce qui est ce que nous voulions prouver. □

10. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. *Voir la preuve du Théorème 1.*

11. L'inverse d'une matrice diagonale est facile à trouver :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, c'est le seul type de matrice pour lequel trouver l'inverse est aussi facile.

Transformations élémentaires

- Pour trouver l'inverse A^{-1} de A, nous utiliserons à nouveau les transformations élémentaires.
- Les transformations élémentaires peuvent être interprétées comme une multiplication de A par des matrices spéciales.
- L'opération d'échange de lignes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

peut être représentée comme une multiplication par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

à gauche :

$$E_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

- L'opération de multiplication d'une ligne par λ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

peut être représentée comme une multiplication par

$$E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

à gauche :

$$E_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

.

- L'opération d'ajout d'une ligne à une autre

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \cdots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

peut être représentée comme une multiplication par

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

à gauche :

$$E_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \cdots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

- Nous avons déjà vu que les transformations élémentaires ne modifient pas le rang et que le déterminant a des propriétés intéressantes par rapport à ces opérations. Maintenant, nous pouvons prouver ces propriétés facilement :

  (i) $\det(E_1 A) = \det(E_1) \cdot \det(A) = -\det(A)$, car $\det(E_1) = -1$ (prouvez ceci !).

  (ii) $\det(E_2 A) = \det(E_2) \cdot \det(A) = \lambda \det(A)$, car $\det(E_2) = \lambda$ (prouvez ceci !).

(iii) $\det(E_3A) = \det(E_3) \cdot \det(A) = \det(A)$, car $\det(E_3) = 1$ (prouvez ceci !).

- Notez que les transformations élémentaires des colonnes sont équivalentes à une multiplication par des matrices élémentaires à droite, pas à gauche !

- Idée : pour trouver A^{-1}, nous allons multiplier A à gauche par des matrices de transformation élémentaire $F_1, F_2, F_3, \ldots$ jusqu'à ce que

$$F_kF_{k-1}\ldots F_3F_2F_1A = I.$$

Alors $A^{-1} = F_kF_{k-1}\ldots F_3F_2F_1$.

- En d'autres termes, pour trouver A^{-1}, nous devons appliquer des transformations élémentaires de ligne aux deux côtés de l'équation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad & \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
& \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Pour simplifier la notation, nous introduisons un truc de notation appelé la matrice augmentée $(A \mid I)$ comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

Appliquer des transformations élémentaires à cette matrice augmentée revient à mettre en place l'équation $AA^{-1} = I$ et à appliquer les transformations aux deux côtés. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad & \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \\
& \implies A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Recette pour trouver l'inverse

Afin de trouver l'inverse d'une matrice, nous jouons au jeu suivant : étant donné une matrice augmentée $(A \mid I)$ de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right),$$

amenez-la à la forme $(I \mid B)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

en appliquant des transformations élémentaires de lignes. Alors $A^{-1} = B$.

Est-il acceptable d'utiliser à la fois des transformations élémentaires de lignes et de colonnes ?

Non. Nous devons en choisir un type et nous y tenir.

- Rappelons que les transformations de lignes sont équivalentes à une multiplication par des matrices élémentaires à gauche.
- Trouver l'inverse A^{-1} par des transformations de lignes revient à résoudre $AX = I$ pour X.

- Les transformations de colonnes sont équivalentes à une multiplication par des matrices élémentaires à droite.
- Trouver l'inverse A^{-1} par des transformations de colonnes revient à résoudre $XA = I$ pour X.
- Rappelons qu'il était acceptable de mélanger les transformations lorsque nous calculions le déterminant et le rang !

Cas particulier des matrices 2×2

Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si

$$\boxed{\det A = ad - bc \neq 0}$$

et son inverse est donné par

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d \cdot a - b \cdot c & d \cdot b - b \cdot d \\ -c \cdot a + a \cdot c & -c \cdot b + a \cdot d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

□

Essayez de trouver cette formule en utilisant des transformations élémentaires !

Autre méthode pour l'inversion de matrice : formule des cofacteurs

Rappelons que le cofacteur C_{ij} de l'élément a_{ij} est défini par

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ \hline & & & a_{ij} & \\ & & & & \\ \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow j & \end{array}$$

Definition 2. *La matrice des cofacteurs de A est la matrice $\operatorname{cof}(A)$ dont les éléments sont les cofacteurs des éléments de A :*

$$(\operatorname{cof}(A))_{ij} = C_{ij}.$$

La matrice adjointe de A est la matrice $\operatorname{adj}(A)$ définie comme la transposée de la matrice des cofacteurs :

$$\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof}(A))^{\top}.$$

Le théorème suivant (sans preuve) donne une autre approche pour trouver l'inverse de A :

Theorem 2. *Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$.*