Mathématiques II
HEC Lausanne, Spring 2025

Feuille de théorie 5

Définition des valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1. *Soit* $A \in M_{n,n}$ *une matrice* *carrée* *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *un nombre. Nous disons qu'un vecteur* *non nul* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *est un* *vecteur propre* *de* A *correspondant à la* *valeur propre* λ *si*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

En d'autres termes, si A *envoie* $\boldsymbol{x}$ *sur lui-même, mais étiré par* λ.

Quelques remarques:

- Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre de A et λ est sa valeur propre, alors

$$A^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}, \quad A^3\boldsymbol{x} = \lambda^3\boldsymbol{x}, \quad \dots, \quad A^n\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x}$$

  pour tout n.

- Comparer la notion de vecteur propre et de valeur propre avec la transformation linéaire d'échelle (homothétique) de la conférence précédente. La transformation

$$S_\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  étire chaque vecteur de λ, alors que A avec valeur propre λ étire de λ seulement certains vecteurs – ses vecteurs propres.

- Notez que λ est clairement une valeur propre de $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et chaque vecteur est son vecteur propre.

- Si une matrice est proportionnelle à l'identité, c'est-à-dire de la forme $A = \lambda I$, nous disons que A est une matrice scalaire. Les matrices scalaires sont les seules matrices qui commutent avec toutes les autres: $AB = BA$ pour tout B implique que $A = \lambda I$ pour un certain nombre λ. Nous montrerons plus tard que λ est la seule valeur propre de $A = \lambda I$.

- Notez que si λ est une valeur propre de A et que nous voulons trouver $\boldsymbol{x}$ tel que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, alors il y a un nombre infini de solutions. Pourquoi? Parce que si $\boldsymbol{x}$ est une telle solution, alors $2\boldsymbol{x}$ l'est aussi, ainsi que $3\boldsymbol{x}$, $4\boldsymbol{x}$, $\pi\boldsymbol{x}$, et cetera, parce que $A(2\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x} = 2\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(2\boldsymbol{x})$.

- Les valeurs propres et les vecteurs propres n'ont de sens que pour les matrices carrées. En effet, si $A \in M_{m,n}$, alors $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, mais $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Par conséquent, $m = n$.

Recherche des valeurs propres et vecteurs propres

Remarque 1. *Rappelez-vous que si* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *et que* A *est inversible, alors* $A^{-1}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ *d'une part et* $A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *d'autre part, donc* $\boldsymbol{x}$ *doit être nul.*

Théorème 1. λ *est une valeur propre de* A *si et seulement si* $\det(A - \lambda I) = 0$ *.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Si λ est une valeur propre, alors $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ pour un vecteur <u>non nul</u> $\boldsymbol{x}$. Par conséquent,

$$A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \text{hence} \quad (A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Puisque $A - \lambda I$ envoie un vecteur non nul à zéro, il ne peut pas être inversible. Par conséquent, $\det(A - \lambda I) = 0$, comme revendiqué.

($\Longleftarrow$) Si $\det(A - \lambda I) = 0$, alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Par conséquent, il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{x}$ qu'il envoie à zéro:

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Par conséquent, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, comme revendiqué. □

Le théorème suivant est donné sans preuve:

Théorème 2. *Si* $A \in M_{n,n}$ *, la fonction* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *est un <u>polynôme</u> de degré* n *. Il est appelé le <u>polynôme caractéristique</u> de la matrice* A *.*

Un corollaire important de ce théorème est que <u>les valeurs propres existent toujours</u>:

Corollaire 1. *Toute matrice carrée* $A \in M_{n,n}$ *a au moins une valeur propre.*

Proof. Les valeurs propres de A sont les racines de $p(\lambda)$. Puisque p est un polynôme, il a une racine (théorème fondamental de l'algèbre). □

Recette pour trouver les valeurs propres. Pour trouver les valeurs propres de A ,

- désigner une <u>valeur propre inconnue</u> par λ
- soustraire λI de A
- calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- le mettre à zéro: $\det(A - \lambda I) = 0$
- trouver les solutions de cette équation.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \implies \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -3 & -8-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(-8-\lambda) - 4 \cdot (-3)$$
$$= 8 + 8\lambda + \lambda + \lambda^2 + 12$$
$$= \lambda^2 + 9\lambda + 20.$$

Therefore, we need to solve
$$\lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0.$$
It is clear that there are two solutions:
$$\lambda_1 = -4 \quad \text{and} \quad \lambda_2 = -5.$$

Recherche des vecteurs propres

Pour trouver les vecteurs propres, nous devons d'abord trouver les valeurs propres. Si les valeurs propres sont connues, nous pouvons trouver les vecteurs propres correspondants en résolvant le système linéaire
$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$
Pour résoudre ce système, utilisez l'approche développée dans la conférence précédente.

Exemple

We have found above that $\lambda_1 = -4$ and $\lambda_2 = -5$ are eigenvalues of $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$. Let us find the eigenvectors corresponding to λ_1 :
$$A - \lambda_1 I = A + 4I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$
Hence, we need to find $\boldsymbol{x}$ such that
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Adding first line to the second, we obtain
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
We can drop the second line because there is zero against it, hence any $\boldsymbol{x}$ satisfying
$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

is an eigenvector. We can parametrize these eigenvectors by x_2:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4x_2/3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

We also need to find the eigenvectors corresponding to $\lambda = -5$:

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and the set of solutions is given by

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Propriétés des valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2. *L'ensemble des vecteurs propres $\boldsymbol{x}$ correspondant à une valeur propre λ de A est appelé l'espace propre.*

La preuve de ce théorème est laissée en exercice:

Théorème 3. *L'espace propre de A correspondant à λ est un espace vectoriel. En d'autres termes, si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ satisfont $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ et $A\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y}$, alors (a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ satisfait également ceci: $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ et (b) pour tout nombre μ, $A(\mu \boldsymbol{x}) = \lambda(\mu \boldsymbol{x})$.*

Le théorème suivant est un résultat simple mais profond:

Théorème 4. *Le déterminant de A est égal au produit de toutes les valeurs propres de A:*

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Proof. Notez que $\det A = \det(A - \lambda I)\,|_{\lambda=0} = p(0)$, où p est le polynôme caractéristique de A. Par le théorème de Vieta, $p(0)$ est égal au produit de toutes les racines de p pour tous les polynômes (pas seulement les polynômes caractéristiques des matrices). □

Corollaire 2. *A est inversible si et seulement si elle n'a pas de valeurs propres nulles.*

Proof. Si $\lambda_i \neq 0$ pour tout i, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, donc la matrice est inversible. D'autre part, si A est inversible, nous avons que $\det A \neq 0$ et par cette représentation du produit, il ne peut pas y avoir $\lambda_i = 0$ parmi les valeurs propres de A. □

Remarque 2. *Hence, if $A \in M_{2,2}$ and we somehow know one eigenvalue, we can find the other using previous theorem. For example, if we are given that $\lambda_1 = 1$ is an eigenvalue of $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, we can find the second eigenvalue λ_2 by*

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = (1-a)(1-b) - ab = 1 - a - b.$$

Théorème 5. *Si* A *est symétrique* ($A^\top = A$)*, alors les vecteurs propres correspondant à différentes valeurs propres sont orthogonaux. En d'autres termes,* $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0$ *pour chaque* $\boldsymbol{x}$ *tel que* $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *tel que* $A\boldsymbol{y} = \mu \boldsymbol{y}$ *et* $\lambda \neq \mu$.

Proof. Puisque $\lambda \neq \mu$, nous avons $\lambda - \mu \neq 0$, par conséquent

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} &= \lambda\, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} - \mu\, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \\
&= \lambda\, \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} - \mu\, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{y}^\top (\lambda \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^\top (\mu \boldsymbol{y}) \\
&= \boldsymbol{y}^\top A \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{y} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où la dernière ligne découle de $A^\top = A$. Par conséquent, $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0$. $\square$

Remarque 3. *Les vecteurs propres peuvent être orthogonaux sans* $A = A^\top$.

Remarque 4. *Deux matrices différentes peuvent avoir le même polynôme caractéristique. Par exemple,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, ils ont les mêmes valeurs propres, mais leurs vecteurs propres sont différents.