Mathématiques II
HEC Lausanne, Spring 2025

Feuille de théorie 6

Définition d'une forme quadratique

Définition 1. *Soit $A \in M_{n,n}$ une matrice carrée. Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

De manière équivalente, on peut écrire

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}.$$

Par exemple, si $n = 2$, nous avons

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Si A est symétrique, nous avons $a_{12} = a_{21}$ et la forme quadratique peut être écrite comme

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Quelques remarques :

- Si A est antisymétrique ($A^\top = -A$), alors

$$\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$$

  et donc $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} = 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$. Cela signifie que les formes quadratiques avec des matrices antisymétriques sont égales à zéro.

- Puisque toute matrice peut être décomposée en une partie symétrique et une antisymétrique

$$A = \frac{A + A^\top}{2} + \frac{A - A^\top}{2},$$

  nous voyons que

$$\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \frac{A + A^\top}{2} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\top \frac{A - A^\top}{2} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \frac{A + A^\top}{2} \boldsymbol{x},$$

  car le second terme donne zéro.

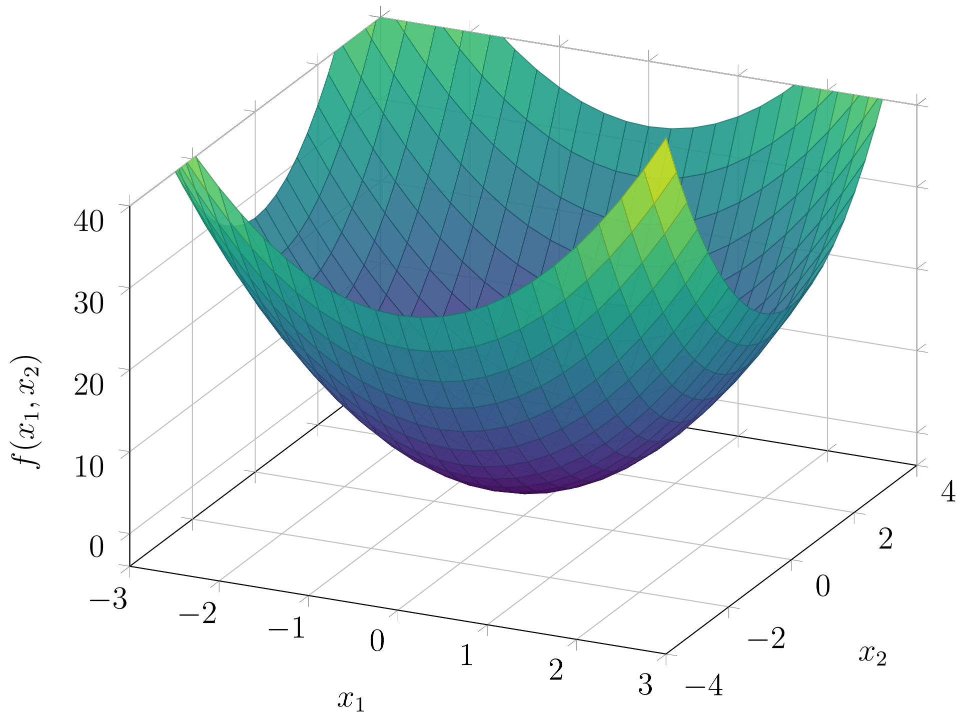
- Ainsi, nous pouvons toujours supposer que A est symétrique. Sa partie antisymétrique disparaît de la forme quadratique de toute façon !

- À partir de maintenant, nous supposons toujours que $A = A^\top$.

Les graphes des formes quadratiques ont des formes paraboliques ou hyperboliques. Par exemple, le graphe de

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

est un paraboloïde. Le graphe de cette fonction est montré dans la figure suivante :



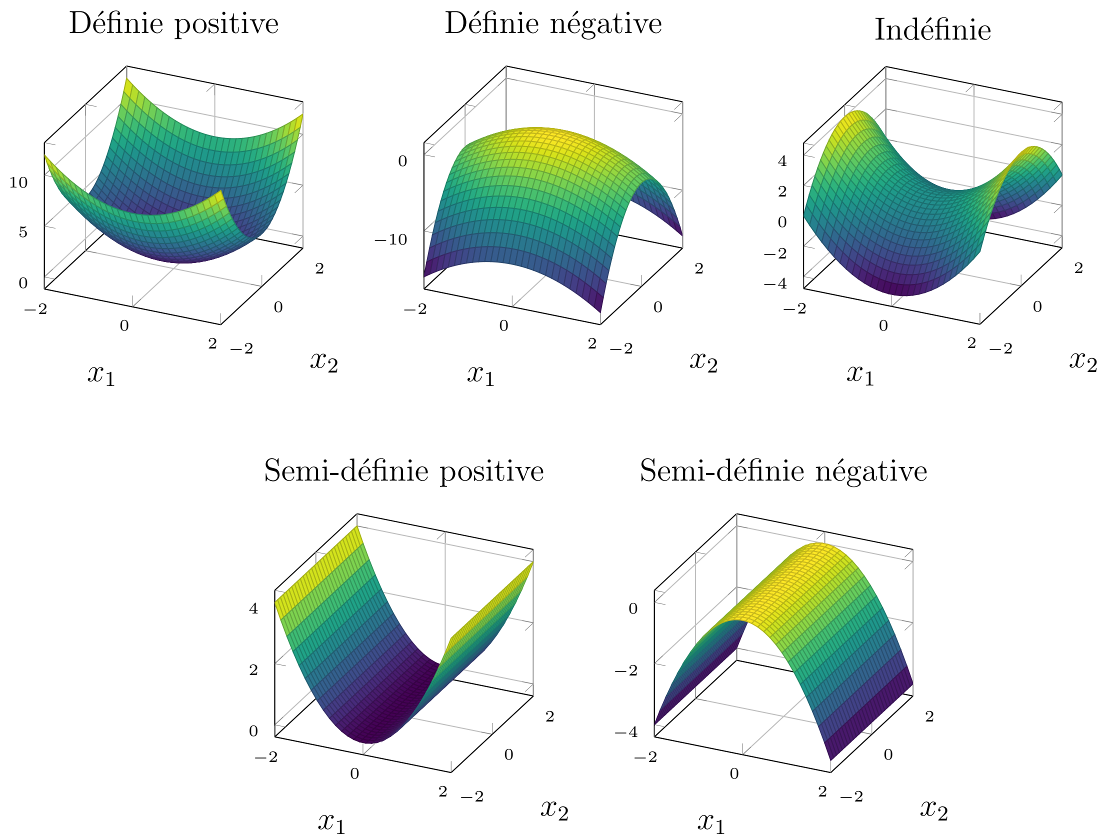
Dans la section suivante, nous allons décrire toutes les formes possibles que ces graphes peuvent prendre.

Classification des formes quadratiques

Définition 2. *Une forme quadratique* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$ *est appelée*

- *définie positive si* $f(\boldsymbol{x}) > 0$ *pour tout* $\boldsymbol{x}$*. Dans ce cas, le graphe est un paraboloïde orienté vers le haut.*
- *négative définie si* $f(\boldsymbol{x}) < 0$ *pour tout* $\boldsymbol{x}$*. Dans ce cas, le graphe est un paraboloïde orienté vers le bas.*
- *indéfinie si* $f(\boldsymbol{x})$ *prend à la fois des valeurs positives et négatives. Dans ce cas, le graphe est un hyperboloïde.*
- *semi-définie positive si* $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ *(pas strictement) pour tout* $\boldsymbol{x}$*.*
- *semi-définie négative si* $f(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *pour tout* $\boldsymbol{x}$*.*

Dans ces cas, nous dirons que f *est de type définie positive/définie négative/indéfinie/semi-définie positive/semi-définie négative.*



Les exemples montrés dans ces images sont :

- **Définie positive**:

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- **Définie négative:**

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- **Indéfinie:**

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- **Semi-définie positive:**

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- **Semi-définie négative:**

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Cas des matrices diagonales

Si A est diagonale ($a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$), alors la forme quadratique peut s'écrire comme

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

Ainsi,

- f est définie positive si $a_{ii} > 0$ pour tout i.
- f est négative définie si $a_{ii} < 0$ pour tout i.
- f est indéfinie si $a_{ii} > 0$ pour certains i et $a_{ii} < 0$ pour certains i.
- f est semi-définie positive si $a_{ii} \geq 0$ pour tout i et $a_{ii} > 0$ pour au moins un i.
- f est semi-définie négative si $a_{ii} \leq 0$ pour tout i et $a_{ii} < 0$ pour au moins un i.

Ainsi, pour les matrices diagonales, il est très facile de vérifier le type de la forme quadratique. Nous verrons plus tard que le cas général n'est pas beaucoup plus compliqué, mais la réponse dépend des valeurs propres de la matrice A au lieu de ses éléments diagonaux.

Loi d'inertie de Sylvester

Une façon simple de vérifier le type d'une forme quadratique f est de la réécrire comme une somme de carrés avec différents coefficients :

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2 = 3(x_1 + 2x_2)^2 - 7x_2^2.$$

Sous cette forme, il est facile de voir que f est indéfinie, car elle contient un terme positif et un terme négatif.

Trouver une telle représentation se fait en complétant le carré :

$$3x_1^2 + 12x_1x_2$$

est presque un carré parfait. Nous pouvons ajouter et soustraire $12x_2^2$ pour obtenir

$$\underbrace{3x_1^2 + 12x_1x_2 + 12x_2^2}_{=3(x_1+2x_2)^2} - 12x_2^2 + 5x_2^2 = 3(x_1 + 2x_2)^2 - 7x_2^2.$$

Si nous appliquons la même procédure à une forme quadratique générale dans $\mathbb{R}^2$, nous découvrirons quelque chose d'intéressant :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\
&= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{a_{22}}{a_{11}}x_2^2\right) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2 \\
&= a_{11}(\dots)^2 + \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 \\
&= a_{11}(\dots)^2 + \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}{a_{11}}x_2^2
\end{aligned}$$

Ici, nous avons remplacé l'expression dans la première parenthèse par $(\dots)^2$ car elle n'est pas importante pour la détermination du type.

L'apparition du déterminant est-elle une coïncidence ? Non, ce n'est pas le cas. En fait, si nous répétons le même calcul pour une forme quadratique

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}, \quad A \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

nous trouverons que

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}(\dots)^2 + \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}{a_{11}}(\dots)^2 + \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}(\dots)^2.$$

Les coefficients des carrés sont les rapports des mineurs principaux de la matrice A. Puisque nous venons de voir que le type de f est déterminé par les signes de ces coefficients, nous pouvons conclure que le type d'une forme quadratique est déterminé par les signes des mineurs principaux de la matrice A. C'est le contenu de la loi d'inertie de Sylvester.

Théorème 1 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Une forme quadratique $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$ est*

- *définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux de A sont positifs :*

$$a_{11} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} > 0, \quad \dots$$

- *négative définie si et seulement si tous les mineurs principaux de A ont des signes alternés :*

$$a_{11} < 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} < 0, \quad \dots$$

- *indéfinie si et seulement si les signes des mineurs principaux de A ne sont ni tous positifs, ni alternés.*

- *semi-définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux sont respectivement non-négatifs, mais peuvent être nuls.*

Ce théorème nous permet de déterminer facilement le type d'une forme quadratique en calculant les déterminants des mineurs principaux de la matrice A et en vérifiant leurs signes.

Exemple 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Les mineurs principaux sont*

$$a_{11} = 1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 < 0.$$

Ainsi, la forme quadratique $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ *est négative définie.*

Formes quadratiques en termes de valeurs propres

Nous avons vu ci-dessus que le type d'une matrice diagonale est déterminé par les signes de ses éléments diagonaux. Il s'avère que le type d'une matrice générale est déterminé par les signes de ses valeurs propres. Montrons cela d'abord sur un exemple 2×2.

Si $A \in M_{2,2}$ a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, soient $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$ leurs vecteurs propres correspondants. Alors, nous pouvons exprimer n'importe quel vecteur $\boldsymbol{x}$ en termes de $\boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$ comme

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2$$

avec certains coefficients c_1 et c_2. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} &= (c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)^\top A(c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) \\ &= c_1^2\boldsymbol{y}_1^\top A\boldsymbol{y}_1 + c_2^2\boldsymbol{y}_2^\top A\boldsymbol{y}_2 + c_1c_2\boldsymbol{y}_1^\top A\boldsymbol{y}_2 + c_2c_1\boldsymbol{y}_2^\top A\boldsymbol{y}_1. \end{aligned}$$

Puisque A est symétrique, ses vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux

$$\boldsymbol{y}_1^\top A\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_2^\top A\boldsymbol{y}_1 = 0$$

(voir le cours précédent). Pour les deux premiers termes, nous avons

$$\boldsymbol{y}_i^\top A\boldsymbol{y}_i = \lambda_i\boldsymbol{y}_i^\top\boldsymbol{y}_i = \lambda_i|\boldsymbol{y}_i|^2, \quad i = 1, 2,$$

où $|\boldsymbol{y}|^2 = \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} = \sum y_i^2 \geq 0$ est la longueur ou norme de $\boldsymbol{y}$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} = \lambda_1c_1^2|\boldsymbol{y}_1|^2 + \lambda_2c_2^2|\boldsymbol{y}_2|^2$$

et son signe est déterminé par les signes de λ_1 et λ_2 (parce que tout le reste est positif).

Ainsi, dans ce cas, nous voyons que le type de la forme quadratique est déterminé par les signes de ses valeurs propres. Il en va de même pour les matrices générales, ce qui est le contenu du théorème suivant (également sans preuve) :

Théorème 2. *Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. La forme quadratique $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ est*

- *définie positive si toutes les valeurs propres de A sont positives.*
- *négative définie si toutes les valeurs propres de A sont négatives.*
- *indéfinie si A a à la fois des valeurs propres positives et négatives.*
- *semi-définie positive si toutes les valeurs propres de A sont non-négatives et au moins une est positive.*
- *semi-définie négative si toutes les valeurs propres de A sont non-positives et au moins une est négative.*

Comment déterminer le type d'une forme quadratique ?

Nous avons deux options :

- Calculer les mineurs principaux de la matrice A et vérifier leurs signes en utilisant la loi d'inertie de Sylvester.
- Calculer les valeurs propres de la matrice A et vérifier leurs signes en utilisant le théorème ci-dessus.