Feuille de théorie 8

Modèle de Leontiev

- L'économie d'un pays est divisée en n secteurs/régions/villes.
- Nous fixons la période de temps (par exemple, un an, un mois, etc.) et considérons la production de biens et la consommation de chaque secteur.
- Les ventes du secteur i au secteur j sont notées x_{ij} .
- La consommation du secteur i est notée x_{ii} .
- L'importation du secteur i est notée y_i .
- L'exportation du secteur i est notée z_i .
- La production totale du secteur i est notée par x_i .

Clairement, nous avons les relations suivantes :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + z_i.$$

Definition 1 (Hypothèses du modèle de Leontiev)**.**

Hypothèse 1. *x_{ki} est proportionnel à la production du secteur i^{th} , c'est-à-dire $x_{ki} = a_{ki}x_i$ où a_{ki} est le coefficient d'échange ou de commerce si $k \neq i$ et coefficient d'auto-consommation si $k = i$.*

Hypothèse 2. *y_i est proportionnel à x_i , c'est-à-dire $y_i = d_i x_i$ où d_i est le coefficient d'importation.*

Nous pouvons écrire le modèle de Leontiev sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

ou simplement

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}.$$

Ici, A est la matrice des coefficients d'échange, $\boldsymbol{x}$ est le vecteur de production et $\boldsymbol{z}$ est le vecteur des exportations.

Notez que $\boldsymbol{x}$ apparaît des deux côtés de l'équation. Nous pouvons résoudre pour $\boldsymbol{x}$ en réarrangeant l'équation :

$$\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \implies (I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \implies \boxed{\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{z}.}$$

Notez que la dernière équation n'est valable que si $I - A$ est inversible. Dans ce modèle, l'inversibilité de $I - A$ a une interprétation très naturelle. Cela signifie qu'il existe une solution unique pour la production de chaque secteur étant donné les exportations de chaque secteur, c'est-à-dire que la production de chaque secteur peut être déterminée de manière unique à partir des exportations de chaque secteur. Si $I - A$ n'est pas inversible, alors il existe une infinité de solutions pour la production de chaque secteur étant donné les exportations de chaque secteur.

Modèle de Leontief : Exemple

Une ville compte 3 industries principales :

- une mine de charbon,
- une centrale électrique, et
- un chemin de fer local.

Pour produire 1 $ de charbon, la mine doit acheter :

- 0,25 $ d'électricité et
- 0,25 $ de transport ferroviaire.

Pour produire 1 $ d'électricité, la centrale électrique doit utiliser :

- 0,65 $ de charbon,
- 0,05 $ de sa propre électricité, et
- 0,05 $ de transport ferroviaire.

Pour fournir 1 $ de transport, la compagnie ferroviaire doit utiliser :

- 0,55 $ de charbon,
- 0,10 $ d'électricité.

Au cours d'une certaine semaine, la mine reçoit une commande de l'extérieur de la ville pour 50 000 $ de charbon, et la centrale électrique reçoit une commande de 25 000 $ d'électricité, également de l'extérieur. Il n'y a pas de demande externe pour le chemin de fer local.

Quelles quantités ces trois industries doivent-elles produire au cours de cette semaine pour satisfaire leur propre demande et la demande externe ?

Solution :

Pour la semaine en question, soit

$x_1 =$ la valeur de la production totale de la mine

$x_2 =$ la valeur totale de la production d'électricité

$x_3 =$ la valeur totale du service ferroviaire.

La matrice d'échange/consommation :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, l'équation $(I - A) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ se lit comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1.00 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50,000 \\ 25,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{z} = \frac{1}{503} \begin{pmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50,000 \\ 25,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102,087 \\ 56,163 \\ 28,330 \end{pmatrix}.$$

Interprétation : afin d'exporter 50 000 \$ de charbon et 25 000 \$ d'électricité, la mine doit produire 102 087 \$ de charbon, la centrale électrique doit produire 56 163 \$ d'électricité, et le chemin de fer doit produire 28 330 \$ de service ferroviaire.

Viabilité d'un secteur

Pour être viable, un secteur doit être en mesure de produire suffisamment de biens pour satisfaire sa propre consommation et la consommation des autres secteurs :

$$x_{1i} + x_{2i} + \cdots + x_{ni} + y_i < x_i.$$

En insérant les définitions de y_i et x_{ij}, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_i + d_i x_i < x_i.$$

Notez que la somme porte sur j et non sur i, nous pouvons donc extraire x_i de celle-ci. En divisant les deux côtés par x_i, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} + d_i < 1.$$

Ceci est la condition de viabilité pour le secteur i.

Notation matricielle pour les importations

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou simplement

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x},$$

où D est la matrice diagonale des coefficients d'importation.

Balance commerciale

La balance commerciale est la différence entre le total des exportations et le total des importations d'un secteur :

$$B = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Il est pratique d'exprimer la balance commerciale sous forme matricielle :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 - y_1 \\ z_2 - y_2 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{pmatrix} = S^\top(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}), \quad \text{où} \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous pouvons insérer $\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}$ et obtenir

$$\begin{aligned} B &= S^\top(\boldsymbol{z} - D\boldsymbol{x}) \\ &= S^\top(\boldsymbol{z} - D(I - A)^{-1}\boldsymbol{z}) && \text{parce que } \boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{z} \\ &= S^\top(I - D(I - A)^{-1})\boldsymbol{z}. \end{aligned}$$

Formule finale pour la balance commerciale :

$$B = S^\top(I - D(I - A)^{-1})\boldsymbol{z}.$$

Autre exemple

Considérons une économie avec 3 secteurs : K, L, M. Soient les importations et les exportations

$$\text{Importations } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \text{Exportations } \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 250 \\ 1200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Étant donné que $d_1 = 30\%$, $d_2 = 25\%$, $d_3 = 10\%$, quelle est la production $\boldsymbol{x}$ de chaque secteur ? Tout d'abord, nous devons trouver la matrice d'importation D :

$$D = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, nous pouvons exprimer les importations en termes de production :

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} \implies X = D^{-1}Y$$

Il reste à trouver D^{-1} et à le multiplier par $\boldsymbol{y}$:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.1} \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{pmatrix}.$$

Interprétation : la production du secteur K est de 1 000 \$, la production du secteur L est de 2 000 \$ et la production du secteur M est de 1 500 \$.

En supposant que

- Il n'y a pas d'auto-consommation,
- Pas d'échanges entre K et M,
- Le secteur M n'achète rien au secteur L,

trouvez la matrice d'échange A et la balance commerciale. Selon les hypothèses, nous pouvons écrire la matrice d'échange comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous écrivons l'équation pour la production de chaque secteur :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{z} \quad \text{ou} \quad (I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$$

et résolvons pour A :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 1200 \\ 300 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a_{12} = 0.375 \\ a_{21} = 0.8 \\ a_{32} = 0.6 \end{cases}$$

La balance commerciale est donnée par

$$B = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 250 + 1200 + 300 - (300 + 500 + 150) = 800.$$

La balance commerciale est positive, ce qui signifie que l'économie exporte plus qu'elle n'importe.