Mathématiques II
HEC Lausanne, Spring 2025

Feuille de théorie 9

Fonction de plusieurs variables

Les fonctions qui prennent $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ (vecteurs vers nombres) sont appelées *fonctions de plusieurs variables.* Notation:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

Au lieu de $f(x_1, \dots, x_n)$ on écrit aussi $f(\boldsymbol{x})$. Pour example, les fonctions de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assignent un nombre (sortie) à chaque point sur un plan (entrée).

Certaines fonctions sont seulement définies sur un certain domaine $D \subset \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on écrit

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Nous avons déjà vu deux exemples dans ce cours :

- Formes linéaires $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}$, où $\boldsymbol{a} \in M_{n,1}$ est un vecteur colonne.
- Formes quadratiques $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$, où $A \in M_{n,n}$ est une matrice carrée symétrique.

Voici un exemple tiré de l'économie : la fonction dite Cobb-Douglas $f(K, L)$ prend deux nombres positifs K (capital) et L (travail) comme entrées et sort la production totale :

$$f(K, L) = cK^a L^b,$$

où c, a, b sont des paramètres.

Une simple généralisation de la notion de forme quadratique est la fonction quadratique :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} + c,$$

où $A \in M_{n,n}$, $\boldsymbol{b} \in M_{n,1}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Comme nous l'avons vu précédemment, une fonction peut être représentée par son graphe. Voici un rappel de sa définition :

$$\text{Graph}(f) = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(\boldsymbol{x})\}.$$

Dessiner des graphes est bien en $n = 1$ et $n = 2$, mais à mesure que n augmente les graphes deviennent moins utiles.

Un concept très important associé aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est leurs ensembles de niveau, dont nous avons également discuté précédemment. Rappelez-vous que si $c \in \mathbb{R}$ est un niveau donné, l'ensemble de niveau correspondant est l'ensemble des points où f prend cette valeur :

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

Rappelez-vous des ensembles de niveau (de la fonction de hauteur) sur les cartes topographiques !

Dérivées partielles

Définition 1. *La dérivée partielle de* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *par rapport à* x_j *,* j *fixe, est la limite suivante :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} := \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + \Delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{\Delta}$$

(à condition qu'elle existe). Notation alternative : f'_{x_j} *.*

En d'autres termes, c'est juste la dérivée par rapport à x_j avec d'autres variables fixées.

Interprétation : la définition précise a $\lim_{\Delta \to 0}$, mais on peut utiliser $f'_{x_j}(\boldsymbol{x})$ pour approximer f au point décalé si Δ est petit :

$$f'_{x_j}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{f(x_1, \ldots, x_j + \Delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{\Delta}$$

$$\implies f(x_1, \ldots, x_j + \Delta, \ldots, x_n) \approx f(\boldsymbol{x}) + f'_{x_j}(\boldsymbol{x})\,\Delta.$$

Selon la fonction et la petitesse de Δ , cette approximation peut être précise ou non. Si Δ est pas petit, cette approximation n'a aucun sens !

Interprétation 2 : $f'_{x_j}(\boldsymbol{x})$ est la pente de f au point $\boldsymbol{x}$ dans la direction de x_j .

Exemple

Soit

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2^4 - 5x_1 x_2^3 + 16.$$

Alors

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 x_2^4 - 5x_2^3, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = 8x_1^2 x_2^3 - 15x_1 x_2^2.$$

Trouvons la valeur de ces dérivées en $(1, 2)$:

$$f'_{x_1}(1, 2) = 64 - 40 = 24, \quad f'_{x_2}(1, 2) = 64 - 60 = 4.$$

Puisque les deux nombres sont positifs, la fonction f augmente dans les deux variables à $(1, 2)$. Cela nous donne également une approximation de $f(1 + \Delta, 2)$ et $f(1, 2 + \Delta)$ pour petit Δ :

$$f(1 + \Delta, 2) \approx f(1, 2) + f'_{x_1}(1, 2)\,\Delta = f(1, 2) + 24\,\Delta,$$

$$f(1, 2 + \Delta) \approx f(1, 2) + f'_{x_2}(1, 2)\,\Delta = f(1, 2) + 4\,\Delta.$$

Élasticité

Définition 2. *L'élasticité de* $y = f(\boldsymbol{x})$ *par rapport à* x_j *est la limite suivante :*

$$E_{x_j}(y) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x_j}{x_j},$$

où $\Delta y = f(x_1, \ldots, x_j + \Delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ *et* $\Delta x_j = (x_j + \Delta) - x_j = \Delta$ *.*

L'élasticité $E_{x_j}(y)$ peut être exprimée en termes de la dérivée partielle comme suit :

$$E_{x_j}(y) = \frac{x_j}{y} \lim_{\Delta \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{x_j}{y} \frac{\partial y}{\partial x_j}.$$

Exemple : $y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{x_1 + x_2}$, alors

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = x_2 e^{x_1+x_2} + x_1 x_2 e^{x_1+x_2} = x_2(1 + x_1)e^{x_1+x_2}.$$

Par conséquent,

$$E_{x_1}(y) = \frac{x_1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{x_1}{x_1 x_2 e^{x_1+x_2}} \cdot x_2(1 + x_1)e^{x_1+x_2} = 1 + x_1.$$

Remarque 1. *Nous aurions pu arriver plus facilement à la même solution si nous avions remarqué que*

$$\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \ln y.$$

C'est plus facile car $\ln$ *prend le produit en somme :*

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2 + x_1 + x_2 \implies \frac{\partial}{\partial x_1} \ln y = \frac{1}{x_1} + 1.$$

Il reste à multiplier par x_1 *:*

$$E_{x_1}(y) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln y = x_1 \left(\frac{1}{x_1} + 1 \right) = 1 + x_1.$$

Cette astuce est connue sous le nom de dérivée logarithmique et elle est fréquemment utile pour différencier les fonctions définies comme des produits de termes plus simples.

Autre exemple : fonction de Cobb-Douglas avec $b = 1 - a$

$$\begin{aligned} Q = cK^a L^{1-a} \implies E_K(Q) &= K \frac{\partial}{\partial K} \ln Q \\ &= K \frac{\partial}{\partial K} (\ln c + a \ln K + (1 - a) \ln L) \\ &= K \cdot a \cdot \frac{1}{K} = a. \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} E_L(Q) &= L \frac{\partial}{\partial L} \ln Q \\ &= L \frac{\partial}{\partial L} (\ln c + a \ln K + (1 - a) \ln L) \\ &= L \cdot (1 - a) \cdot \frac{1}{L} = 1 - a. \end{aligned}$$

Différentielle totale

Définition 3. *La différentielle totale ou différentielle du premier ordre d'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est l'objet formel suivant :*

$$df(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Vous devriez considérer df comme une fonction de $\boldsymbol{x}$ et des incréments formels dx_j, $j = 1, \ldots, n$. Ici dx_j est une variable formelle, au lieu de laquelle on branche un Δx_j spécifique pour calculer l'approximation

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \Delta x_j.$$

Alors $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta}) \approx f(\boldsymbol{x}) + \Delta f(\boldsymbol{x})$.

Par exemple, si $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2^4 - 5x_1 x_2^3 + 16$, alors

$$df(\boldsymbol{x}) = (4x_1 x_2^4 - 5x_2^3)\, dx + (8x_1^2 x_2^3 - 15x_1 x_2^2)\, dy.$$

En prenant $\Delta x_1 = 0.02$ et $\Delta x_2 = 0.03$ à $(1, 2)$, nous obtenons

$$\Delta f(1, 2) = 24 \cdot \Delta x_1 + 4 \cdot \Delta x_2 = 24 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.03 = 0.6.$$

Gradient

Définition 4. *Le gradient de* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est le vecteur des dérivées partielles :*

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire la différentielle totale comme

$$df(\boldsymbol{x}) = (\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}))^\top d\boldsymbol{x}.$$

Notez que si $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})$ est orthogonal à un vecteur d'incrément donné $\Delta\boldsymbol{x}$, alors

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) \approx (\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}))^\top \Delta\boldsymbol{x} = 0.$$

Cela signifie que f change plus lentement que linéairement dans la direction de $\boldsymbol{\Delta}$.

Remarque 2. *Le gradient est toujours orthogonal aux ensembles de niveau. Nous en avons discuté avant avec des formes linéaires !*

Dérivées partielles supérieures

De même que nous avons défini f'_{x_j}, nous pouvons définir les dérivées partielles des dérivées du second ordre :

$$f''_{x_j,x_i}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}).$$

Avons-nous besoin de garder une trace de l'ordre dans lequel nous les calculons ? Heureusement, non. Pour les fonctions *sympathiques*, les dérivées partielles commutent :

$$f''_{x_j,x_i}(\boldsymbol{x}) = f''_{x_i,x_j}(\boldsymbol{x})$$

ou dans une autre notation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}.$$

Nous pouvons maintenant aller plus loin et définir des dérivées d'ordre supérieur de la même manière :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1\,\partial x_2\,\ldots\,\partial x_k}.$$

Exemple : si $f(x_1,x_2) = 2x_1^2x_2^4 - 5x_1x_2^3 + 16$, alors

$$f''_{x_1,x_1} = 4x_2^4, \quad f''_{x_1,x_2} = 16x_1x_2^3 - 15x_2^2, \quad f''_{x_2,x_2} = 24x_1^2x_2^2 - 30x_1x_2, \quad f'''_{x_1,x_1,x_2} = 16x_2^3, \ldots$$